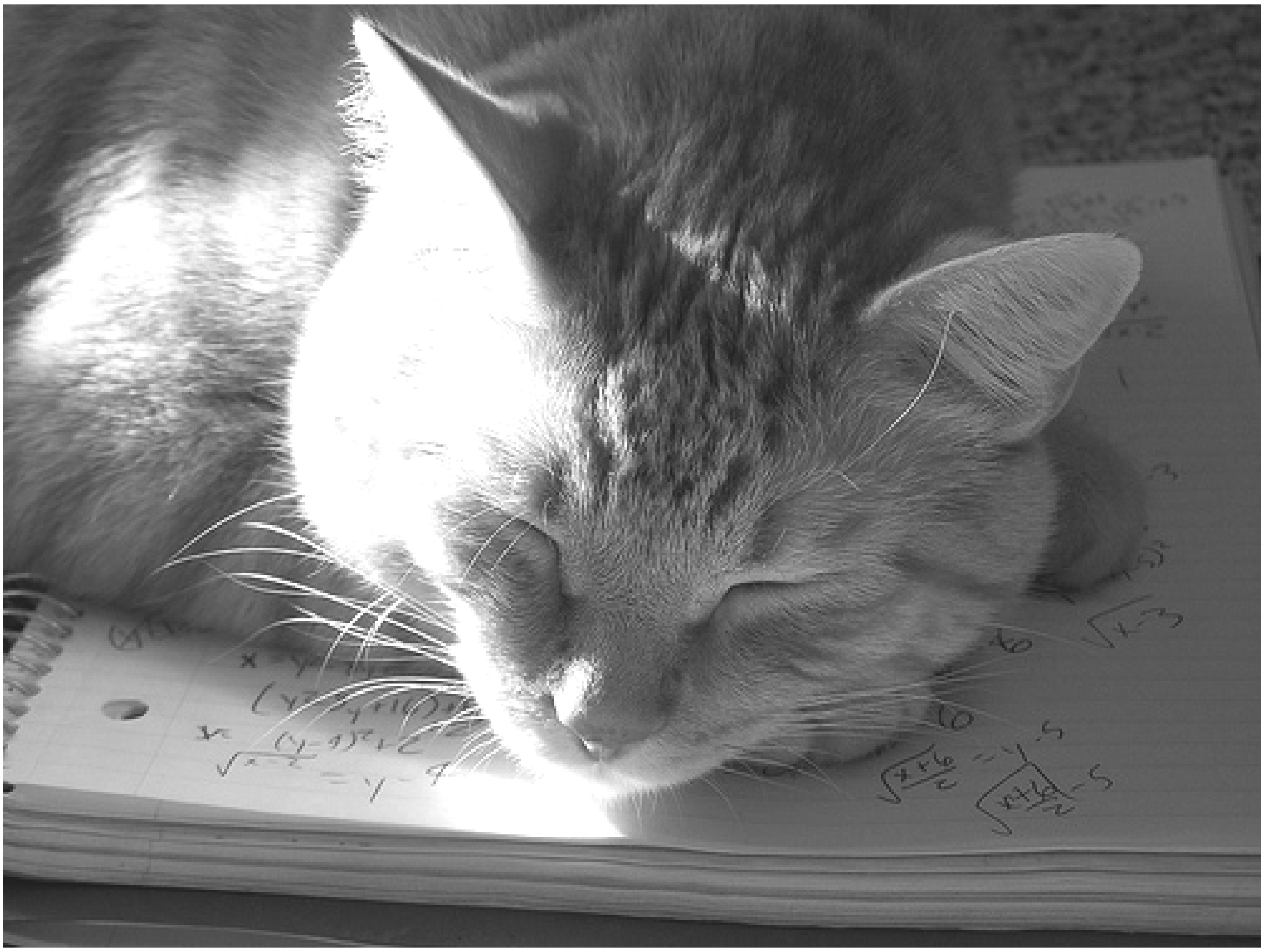
MATEMATICA C^3

ALGEBRA 1

3. LE BASI DEL CALCOLO LETTERALE

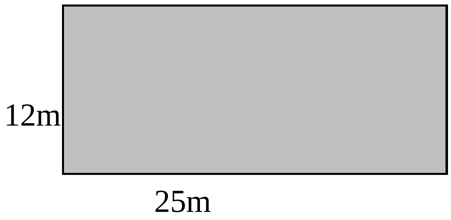


Ernest!
Photo by: Ssmallfry
taken from: http://www.flickr.com/photos/ssmallfry/2262374892/

1. ESPRESSIONI LETTERALI E VALORI NUMERICI

►1. Lettere per esprimere formule

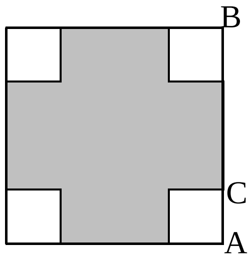
In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?



Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta: $S=(25\cdot 12)m^2=300$ Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?
La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con una formula: , n $A=b\cdot h$ ella quale abbiamo indicato con *b* la misura di una dimensione e con *h* la misura dell'altra dimensione, assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

La formula ha carattere generale; essa serve ogni qualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di determinare perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.



1 Esprimi con una formula l'area della superficie della zona colorata, indicando con l la misura del lato AB e con b la misura di AC.
Svolgimento: l'area del quadrato è…., l'area di ciascuno dei quadratini bianchi è…. Pertanto l'area della superficie in grigio è….

►2. Lettere per descrivere schemi di calcolo

L'insegnante chiede agli alunni di scrivere "il doppio della somma di due numeri".

- Antonella scrive: $2\cdot(3+78)$
- Maria chiede "quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta"
- Giulia scrive: $2\cdot(a+b)$

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo

2 Scrivi l'espressione algebrica letterale relativa alla frase " eleva al quadrato la differenza tra il cubo di un numero e il doppio del suo quadrato"
Svolgimento: detto a il numero generico, il cubo di *a* si indica con…, il doppio quadrato di *a* si indica con … e infine il quadrato della differenza sarà: …………

3 Traduci in parole della lingua italiana il seguente schema di calcolo: $(a-b)^3$
Svolgimento: indicati con a e b due generici numeri la traduzione dell'espressione algebrica in parole sarà: "…………………"

DEFINIZIONE. Un'**espressione letterale** o **espressione algebrica** è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Osservazione 1: per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.
Per esempio, la scrittura $3\cdot 4+$ non è corretta, in quanto il simbolo + dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale $a\cdot c+$

Osservazione 2: come nelle espressioni numeriche le parentesi indicano la priorità di certe operazioni rispetto ad altre.
La formula $a\cdot(x+y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di due altri" . Essa è diversa da che $a\cdot x+y$ rappresenta "la somma del prodotto di due numeri con un terzo numero".

4 Individua tra quelle sottostanti le espressioni letterali scritte correttamente:

1) $b\cdot\frac{4}{5}+\left(3-\frac{7}{2}\right)\cdot a-a$ 2) $a\cdot+2-b^4$ 3) $(\ x\cdot(a-b)^2+(x-3)$

4) $x^y-a:2$ 5) $-a+4b+c$

Svolgimento: sono corrette la 1, la 4 e la 5; la 2 presenta un doppio segno di operazioni $\cdot+$, la 3 ha la prima parentesi tonda che non è stata chiusa.

►3. Lettere per esprimere proprietà

Per esprimere le proprietà delle operazioni tra numeri si usano le lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi.
La scrittura $(a+b)+c=a+(b+c)$ esprime la proprietà associativa dell'addizione. In essa le lettere a, b, c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri, è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

5 Collega con una freccia la proprietà dell'operazione con la sua scrittura attraverso lettere:

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE
Commutativa dell'addizione	$a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$
Associativa della moltiplicazione	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Distributiva del prodotto rispetto alla somma	$a+b=b+a$

6 Esprimere con le lettere la proprietà commutativa della moltiplicazione
Svolgimento: considerati a e b due numeri qualsiasi, la proprietà commutativa si esprime per mezzo dell'espressione………; cioè ……………………….

►4. Il valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale $2\cdot x^2+x$ traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero; fanne il quadrato; raddoppia quanto ottenuto; aggiungi al risultato il numero preso inizialmente".
Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico $x\to x^2\to 2\cdot x^2\to 2\cdot x^2+x$ e può essere usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.
Calcoliamo il valore dell'espressione $2\cdot x^2+x$, sostituendo alla lettera il numero naturale 5.
Seguiamo la schematizzazione $x\to x^2\to 2\cdot x^2\to 2\cdot x^2+x$ e otteniamo: $5\to 25\to 50\to 55$.
Il risultato è 55.
Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica il cui $2\cdot 5^2+5$ risultato è 55.
E se al posto di x sostituiamo -5? Cambia il risultato?
Bene, eseguiamo la sostituzione: $2\cdot(-5)^2+(-5)=$ = …….. Lasciamo a te il calcolo finale.
Ti sei accorto che il risultato è cambiato.

DEFINIZIONI
In un'espressione letterale **le lettere** rappresentano **le variabili** che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri.
Chiamiamo **valore di un'espressione letterale** il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un numero. Il valore dell'espressione letterale **dipende dal valore assegnato alle sue variabili**.

7 Consideriamo l'espressione letterale $E=-3\cdot a+2\cdot(-a+1)$.
Osserviamo che vi compare una sola variabile, la lettera *a*; supponiamo che E rappresenti uno schema di calcolo tra numeri interi relativi. Determiniamo il valore dell'espressione per alcuni della sua variabile:

$a=-2 \;\rightarrow\; -3\cdot(-2)+2\cdot(-(-2)+1)=+6+2\cdot(2+1)=6+6=12$

$a=1 \;\rightarrow\; -3\cdot(1)+2\cdot(-(1)+1)=-3+2\cdot(-1+1)=-3+0=-3$

$a=-1 \;\rightarrow\;$ …………………

Costruiamo una tabella ponendo in una riga i valori della variabile e nell'altra i corrispondenti valori di E:

a	-2	1	-1
E	12	-3	

8 L'espressione letterale $E=-3\cdot a+2\cdot(-a+1)$ rappresenta ora uno schema di calcolo tra numeri razionali relativi; completa la tabella:

a	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{5}$	-11	0
E				

R. $[-2;\; 9;\; 57;\; 2]$

Ad ogni valore razionale attribuito alla variabile, corrisponde un valore dell'espressione assegnata.

9 Calcola il valore dell'espressione letterale le $E=\frac{3}{7}\cdot a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot(a-b)+a-b$ cui variabili a, b rappresentano numeri razionali, per i valori assegnati nella tabella sottostante.
Svolgimento: se vogliamo calcolare il valore dell'espressione letterale dobbiamo scegliere due numeri razionali, uno da assegnare alla variabile a, l'altro alla variabile b.

a	3	0	2	$-\frac{3}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
E				

Risposte: $(3,-3)\rightarrow-\frac{6}{7};\quad \left(0,-\frac{1}{2}\right)\rightarrow\frac{1}{4};\quad \left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\rightarrow\frac{27}{28}$

In conclusione, ad ogni coppia di numeri razionali, corrisponde un numero razionale dell'espressione.

10 Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per $a=1$, $b=1$
Svolgimento: $3\cdot1\cdot(1-1)=3\cdot1\cdot0=0$.

11 Calcolare il valore numerico dell' espressione: $\frac{a}{a-3}+\frac{b}{3-b}$ per $a=-1$, $b=0$

Svolgimento: $=\ \frac{-1}{-1-3}+\frac{0}{3-0}$ ....

12 Calcola il valore di $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$ costruita con le variabili x e y che rappresentano numeri razionali.
L'espressione letterale assegnata traduce il seguente schema di calcolo:" la divisione tra la differenza di due numeri e il triplo del primo numero". Completa la seguente tabella:

x	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{3}{4}$	-4
y	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2
E				

Ti sarai accorto che in alcune caselle colorate compare lo stesso valore per E: perché secondo te succede questo fatto?
Vi sono, secondo te, altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

►5. Condizione di esistenza di un'espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari, sempre riferiti alla stessa espressione $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$

1° caso:

x	Y	E
1	1	0

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3}=0$

13 *Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?*

2° caso:

x	y	E
0	25	

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo dei punti di domanda perché in questo caso il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0;
il calcolo finale è dunque $\frac{-25}{0}=$ Impossibile.

14 *Vi sono secondo te altre coppie che rendono impossibile il calcolo del valore per E?*

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali $(x\,,y)$ l'espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non dobbiamo scegliere coppie aventi x uguale a zero.
Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la **Condizione di Esistenza** $x\neq 0$
L'esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a un'espressione letterale dobbiamo riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.
Se l'espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la **C**ondizione di **E**sistenza, eliminando quei valori che rendono nullo il divisore.
Per comprendere la necessità di porre le condizioni d'esistenza ricordiamo la definizione di divisione.
Quanto fa 15 diviso 5? Perché?
In forma matematica: $15:5=3$ perché $3\cdot 5=15$. Quindi, generalizzando; $a:b=c$ se $c\cdot b=a$.
Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0.
Quanto fa $0:5?$
Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0\cdot 5=0$.
Quanto fa $15:0?$
Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15:0$ è impossibile perché non esiste x per il quale $x\cdot 0=15$.
Quanto fa $0:0?$
Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non né trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0:0=33$ infatti $33\cdot 0=0$, anche $0:0=-189{,}67$ infatti $-189{,}67\cdot 0=0$, $0:0=0$ infatti $0\cdot 0=0$, ancora $0:0=10^{99}$ infatti $10^{99}\cdot 0=0$. Quindi $0:0$ è indeterminato, perché non è possibile determinare un x tale che $x\cdot 0=0$, per qualunque valore di x si ha $x\cdot 0=0$.

Consideriamo l'espressione letterale $E=\frac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali. Premettiamo :

- ✓ la descrizione a parole dello schema di calcolo: "divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma"
- ✓ la domanda che riguarda il denominatore: "quando sommando due numeri razionali otteniamo 0 al denominatore? "
- ✓ la **C**ondizione di **E**sistenza: " a e b non devono essere numeri opposti".

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E					

Dalla Condizione di Esistenza, ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo con esse calcolare il valore di E. L'ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0; il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4},0\right)$ vale 1.

La tabella verrà quindi così completata:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E	impossibile	-1	1	impossibile	0

15 Adesso prova tu con l'espressione $E=-\frac{x-2}{2x^2}$ completando la tabella:

x	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$
E				

16 Calcola il valore numerico dell'espressione: $\frac{3x-1}{x}$ per $x=0$

Svolgimento: Sostituendo alla x il valore assegnato si ha una divisione per........... e quindi………

►6. Altri esercizi

17 Scrivi la formula che ci permette di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore $B=5$ cm, base minore $b=2$ cm e altezza $h=4$ cm.

18 Scrivi la formula che ci consente di calcolare il perimetro di un quadrato di misura *l*.

19 Determina l'altezza h relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC.

Caso numerico: $\overline{AB}=8m.$ $\overline{AC}=15m.$

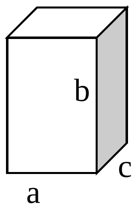
Caso generale: Indica con x e y le misure dei cateti, e determina la formula per calcolare la misura di h_i .

20 Il volume della scatola avente le dimensioni di 7cm. 10cm. 2cm. è ……….

Generalizza la questione indicando con a, b, c la misura delle sue dimensioni ……………

Se raddoppiamo ciascuna dimensione allora il volume diventa

$\alpha)\ 2\cdot a\cdot b\cdot c$ $\beta)\ a^2\cdot b^2\cdot c^2$ $\gamma)\ 6\cdot a\cdot b\cdot c$ $\delta)\ 8\cdot a\cdot b\cdot c$



Scrivi sotto forma di espressioni letterali le seguenti frasi

21 Moltiplica *a* per l'inverso di *a*. $\left[a\cdot\frac{1}{a}\right]$

22 Moltiplica *a* per l'opposto del cubo di *a*.

23 Sottrai ad *a* l'inverso di *b*. $\left[a-\frac{1}{b}\right]$

24 Somma al triplo di *a* il doppio quadrato di *b*.

25 Sottrai il doppio di *a* al cubo di *a*. $\left[a^3-2a\right]$

26 Moltiplica l'inverso di *b* per il quadrato dell'inverso di *a*.

27 Somma al cubo di *a* il quadrato della somma di *a* e *b*.

28 Dividi il quadrato di *a* per il triplo cubo di *b*.

29 Moltiplica il quadrato di *b* per l'inverso del cubo di *a*.

Scrivi con una frase le seguenti espressioni

30 $3a$ [Il triplo di *a*]

31 $2b-5a$

32 $a\cdot\frac{1}{a}$

33 $\frac{2a}{3b^2}$ [Dividi il doppio di *a* per il triplo del quadrato di *b*]

34 $(a+b)^2$

35 $\frac{3x+y}{2x^2}$

Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

36 $3x^2-\frac{1}{4}x^2$ per $x=\frac{1}{2}$ *Svolgimento:* $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\ldots\ldots\ldots=\frac{11}{16}$

37 $5a^2b$ per $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{5}$ *Svolgimento:* $5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

38 $4a+a^3$ per $a=2$ $[16]$

39 $2a+5a^2$ per $a=-1$ $[3]$

40 $3x+2y^2(xy)$ per $x=1,\ y=-\frac{1}{2}$ $\left[\frac{11}{4}\right]$

41 $a^2-b^{-1}+ab$ per $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

42 $3a^2b-7ab+a$ per $a=1,\ b=3$ $[-11]$

43 $3xy-2x^2+3y^2$ per $x=\frac{1}{2},\ y=2$ $\left[\frac{29}{2}\right]$

44 $\frac{2}{3}\cdot a\left(a^2-b^2\right)$ per $a=-3,\ b=-1$ $[-16]$

45 $\frac{xy}{x}+3xy^3$ per $x=2,\ y=-1$ $[-7]$

46 $\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}+2a+3b$ per $a=\frac{1}{4},\ b=-2$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

47 $3x^3+2xy\left(\frac{x^2}{y}\right)+2y^2$ per $x=-2,\ y=\frac{3}{4}$ $\left[-\frac{311}{8}\right]$

48 $\frac{4a-7b}{(2a+3b)^3}\cdot ab^3$ per $a=-\frac{1}{2},\ b=1$ $\left[\frac{9}{16}\right]$

49 $\frac{x}{x+3}+y^2-\frac{xy-3x+y}{(xy)^2}$ per $x=3,\ y=\frac{1}{3}$ $\left[\frac{149}{18}\right]$

51 $\frac{(4a-2b)\cdot 2a^2}{3b^3}\cdot\frac{3}{4}ab+a^3$ per $a=1,\ b=-1$ $[4]$

52 $\frac{4x^2-5xy+3y}{6x+y^2}$ per $x=-1,\ y=2$ $[-10]$

53 $\frac{3}{2}\cdot a^2+\frac{1}{2}a-1$ per $a=0\,;\ a=-1\,;\ a=1$

54 $-a^2\cdot b\cdot c^3$ per $(a=0;\ b=1;\ c=-1)$ e per $\left(a=-1;\ b=\frac{9}{16};\ c=\frac{4}{3}\right)$

55 $-\frac{3}{2}a+2b^2+11$ per $\left(a=-20;\ b=-\frac{1}{2}\right)$ e per $\left(a=\frac{2}{3};\ b=0\right)$

56 $2\cdot x^5-8\cdot x^4+3\cdot x^3+2\cdot x^2-7\cdot x+8$ per $x=0;\ x=-1;\ x=1$

57 $-a^2+\frac{1}{a}-3\cdot a^3$ per $a=\frac{1}{3};\ a=-1;\ a=0\,;\ a=1$

Sostituendo alle lettere i numeri, affianco indicati, stabilisci se le seguenti espressioni hanno significato:

58 $\frac{x+3}{x}$ *per* $x=0$ SI NO

59 $\frac{x^2+y}{x}$ *per* $x=3,\ y=0$ SI NO

60 $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ *per* $a=1,\ b=1$ [non ha significato perché $\frac{4}{0}$ non è un numero]

61 $\frac{5x^2+3y-xy}{(x^2+y)^3}$ *per* $x=2,\ y=-2$ SI NO

62 $\frac{a^3+b+6a^2}{a^2+b^2+3ab-3a^2}$ *per* $a=1,\ b=\frac{4}{3}$ SI NO

Lettere per verificare/ confutare uguaglianze o proprietà

63 Sostituendo alle lettere numeri razionali arbitrari, determina se le seguenti uguaglianze tra formule sono **V**ere o **F**alse

$a^2+b^2=(a+b)^2$ V F

$(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$ V F

$(5a-3b)\cdot(a+b)=5a^2+ab-3b^2$ V F

64 Se n è un qualunque numero naturale, l'espressione $2\cdot n+1$ dà origine

[A] ad un numero primo [B] ad un numero dispari

[C] ad un quadrato perfetto [D] ad un numero divisibile per 3

65 Quale formula rappresenta un multiplo di 5, qualunque sia il numero naturale attribuito ad n?

[A] $5+n$ [B] n^5 [C] $5\cdot n$ [D] $\frac{n}{5}$

2. MONOMI

►1. L'insieme dei monomi

D'ora in poi quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare l'operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l'operazione. Così l'espressione verrà scritta in modo $5\cdot a^2+\frac{3}{8}\cdot a\cdot b-7\cdot b^2$ più compatto $5a^2+\frac{3}{8}ab-7b^2$.

DEFINIZIONE. Una espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama **monomio.**

Esempi

- L'espressione nelle due variabili a e b $E=5\cdot 2\,a^2\frac{3}{8}ab\,7b^2$ è un monomio perché vediamo che numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.
- L'espressione $E=2a^2-ab^2$ non è un monomio poiché tra le lettere compare anche il segno di sottrazione.

66 Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi:

$E_1=35x^2+y^2$; $E_2=-4^{-1}ab^4c^6$; $E_3=\frac{4}{x}y^2$; $E_4=-\frac{87}{2}x^2z$

Per rispondere in modo corretto devo individuare quelle espressioni in cui compare solamente la ……………; pertanto sono monomi ……………….

Osservazioni
Gli elementi di un monomio sono **fattori**, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche **potenze**, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

DEFINIZIONE. Un **monomio** si dice **ridotto in forma normale** quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempio

Il monomio $E=5\cdot 2\,a^2\frac{3}{8}ab\,7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna. Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$; eseguiamo il prodotto di potenze con le stesse basi otteniamo a^3b^3 . Il monomio in forma normale è $E=\frac{105}{4}a^3b^3$

Procedura per ridurre in forma normale un monomio
- moltiplicare tra loro i fattori numerici
- moltiplicare le potenze con la stessa base

67 Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$\frac{4}{9}ab\,18c^3 2^{-2}a^3b=\frac{\dots}{\dots}a^{\dots}b^{\dots}c^{\dots}$; $-x^5\frac{1}{9}y^4(-1+5)^2y^7=$ ………..

DEFINIZIONE. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama **coefficiente.**

Esempio

Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi e i rispettivi coefficienti:

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1

DEFINIZIONI
Se il coefficiente del monomio è zero il **monomio** si dice **nullo.**
Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale ne costituisce la **parte letterale.**

Esempio

L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$

è un monomio dal momento che il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3 b c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione;

il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Controesempi

L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3+bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati oltre che dalla moltiplicazione anche dalla addizione.

L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$.

DEFINIZIONE. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono **simili.**

Esempio

Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0{,}5a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$. L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

DEFINIZIONE. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono **monomi opposti.**

Esempio

I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.

Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$, ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti

68 Nell'insieme $M=\left\{-\frac{34}{5}a^3b\ ,\ 3^2a^2b^4\ ,\ \frac{1}{3}\mathrm{ab}^3\ ,\ a^3b\ ,\ -a\ ,\ 7\mathrm{a}^2b^4\ ,\ -\frac{1}{3}\mathrm{ab}^3\ ,\ -89\mathrm{a}^3b\right\}$ dei monomi, determina i sottoinsiemi **S** dei monomi simili e in essi le coppie di monomi opposti facendone una rappresentazione con diagrammi di Venn.

DEFINIZIONI
Il **grado complessivo** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.
Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il **grado** del monomio **rispetto a quella variabile.**

Esempio

Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6 ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale (3+1+2=6). Rispetto alla variabile a è di terzo grado, rispetto alla variabile b è di primo grado ed infine è di secondo grado rispetto alla variabile c.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o più variabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?
Consideriamo il monomio $56\,a^3 b^0 c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo: . Se in un $56\,a^3 \cdot 1 \cdot c^2 = 56\,a^3 c^2$ monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3\,a^0 x^0 = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

Osservazione
Esistono **monomi di grado 0**; essi presentano solo il coefficiente e pertanto **sono** equiparabili ai **numeri razionali.**

►2. Il valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo numeri.

Esempio

Calcola il valore del monomio $3\,x^4 y^5 z$ per i valori $x=-3\ ;\ y=5\ ;\ z=0$
Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3 \cdot (-3)^4 \cdot 5^5 \cdot 0 = 0$ essendo uno dei fattori nullo.

Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule della geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo = $\frac{1}{2} b\,h$; area del quadrato = l^2; perimetro del quadrato = $4\,l$; area del rettangolo = $b\,h$; volume del cubo = l^3 ecc.
Esse acquistano significato quando al posto delle lettere sostituiamo numeri positivi che rappresentano le misure della figura considerata.

69 Calcola l'area di un triangolo che ha altezza $h=2{,}5$ e base $b=\frac{3}{4}$.
Il monomio che permette di calcolare l'area del triangolo è ……, sostituendo i valori numerici alle variabili ottengo ………

Individua l'esatta definizione tra quelle proposte

70 Un monomio è:
[A] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto operazioni di moltiplicazione e potenza con esponente intero;
[B] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto addizioni e moltiplicazioni tra termini numerici e termini letterali;
[C] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto prodotti di fattori numerici e letterali;
[D] un'espressione algebrica letterale nella quale numeri e lettere sono legati dalle operazioni razionali.

71 Il grado complessivo di un monomio è:
[A] l'esponente della prima variabile che compare nel monomio;
[B] la somma di tutti gli esponenti che compaiono sia ai fattori numerici sia a quelli letterali;
[C] il prodotto degli esponenti delle variabili che compaiono nel monomio;
[D] la somma degli esponenti di tutte le variabili che vi compaiono.

72 Due monomi sono simili se:
[A] hanno lo stesso grado;
[B] hanno le stesse variabili;
[C] hanno lo stesso coefficiente;
[D] hanno le stesse variabili con rispettivamente gli stessi esponenti.

73 Nell'insieme *E*, i cui elementi sono espressioni letterali, determina il sottoinsieme *M* dei monomi:

$$E=\left\{3+\mathrm{ab};\ -2\mathrm{a};\ -\frac{7}{3}\mathrm{ab}^2;\ -\left(\frac{4}{3}\right)^3;\ \mathrm{a}^2\mathrm{bc}\cdot\frac{-2}{a^3};\ 4\mathrm{a}^{-3}\mathrm{b}^2\mathrm{c}^5;\ -x\ ;\ 8\mathrm{x}^4-4\mathrm{x}^2;\ -y\cdot\left(2\mathrm{x}^4+6\mathrm{z}\right);\ \frac{\mathrm{abc}^9}{3+7^{-2}}\right\}$$

$$M=\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$$

74 Completa: Nel monomio $m=-\frac{5}{2}a^3x^2y^4z^8$ distinguiamo Coefficiente = ……….
Parte letterale = ……….. Grado complessivo = …… Il grado della lettera x è ………

75 L'insieme dei monomi: $M=\left\{\frac{1}{3}abc^2\ ;\ \frac{1}{3}a^2bc\ ;\ -3abc^2\ ;\ -\frac{1}{3}abc^2\right\}$ contiene

[A] monomi aventi lo stesso coefficiente
[B] monomi con la stessa parte letterale
[C] monomi nelle stesse variabili
[D] monomi dello stesso grado
[E] monomi di grado dispari

76 Motiva brevemente la verità o falsità delle seguenti proposizioni:
"Se due monomi hanno ugual grado allora sono simili" V F perché … … … … … … … ...
"Se due monomi sono simili allora hanno lo stesso grado" V F perché … … … … … … … ...

77 Quale diagramma di Venn rappresenta in modo corretto la seguente proposizione:
"alcune espressioni letterali non sono monomi"
legenda: L insieme della espressioni letterali, M insieme dei monomi

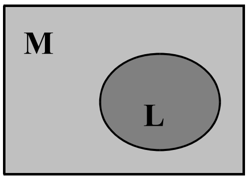


Fig 2

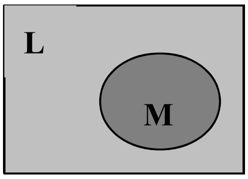


Fig1

78 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a)	Il valore del monomio $-a$ è negativo per qualunque a diverso da zero	V	F
b)	Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero	V	F
c)	Il monomio b^6 è il cubo di b^2	V	F
d)	L'espressione ab^{-1} è un monomio	V	F
e)	Il valore del monomio ab è nullo per a = 1 e b = -1	V	F

►3. Moltiplicazione di due monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza, divisione.
Ricordiamo che definire in un insieme un'operazione significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.
La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano fattori e il risultato si chiama prodotto, proprio come negli insiemi numerici.

DEFINIZIONE. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti, per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

Esempio

Assegnati i monomi $m_1=-4x^2yz^3$ $m_2=\frac{5}{6}x^3z^6$ il monomio prodotto è

$$m_3=\left(-4\cdot\frac{5}{6}\right)\left(x^2\cdot x^3\right)\cdot y\cdot\left(z^3\cdot z^6\right)=-\frac{10}{3}x^5yz^9$$

Procedura per moltiplicare due monomi
La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:
- **nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;**
- **nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.**

79 Determina il prodotto dei monomi delle seguenti coppie:

$m_1=-x^2y^4;\quad m_2=-\frac{8}{5}x^2y;\quad m_1\cdot m_2=m_3=+\frac{8}{5}x^{\dots}y^{\dots}$

$m_1=-\frac{15}{28}xy^3;\quad m_2=-\frac{7}{200}x^2y^2;\quad m_1\cdot m_2=m_3=\dots\dots\dots$

$m_1=a^5b^5y^2;\quad m_2=-\frac{8}{5}a^2y^2b^3;\quad m_1\cdot m_2=m_3=\dots\dots$

80 Determina il grado dei monomi fattori dati nell'esercizio precedente e determina il grado del monomio prodotto:

grado di m_1	**grado di m_2**	**grado di m_3**

Puoi concludere che il grado del monomio prodotto è:
[A] Il prodotto dei gradi dei suoi fattori
[B] La somma dei gradi dei suoi fattori
[C] Minore del grado di ciascuno dei suoi fattori
[D] Uguale al grado dei suoi fattori

Le proprietà della moltiplicazione:

- commutativa: $m_1\cdot m_2=m_2\cdot m_1$
- associativa: $m_1\cdot m_2\cdot m_3=(m_1\cdot m_2)\cdot m_3=m_1\cdot(m_2\cdot m_3)$
- 1 è l'elemento neutro: $1\cdot m=m\cdot 1=m$
- se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0\cdot m=m\cdot 0=0$

Esegui le seguenti moltiplicazioni

81 $(-2xy)\cdot(+3ax)$ $\qquad 6a(-2ab)(-3a^2b^2)$ $\qquad -x(14x^2)$

82 $(-1)(-ab)$ $\qquad 1{,}5a^2b\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$ $\qquad -\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$

83 $1{,}\overline{6}xa(1{,}2xy^2)$ $\qquad \left(\frac{12}{7}m^2n^3\right)\left(-\frac{7}{4}mn\right)$ $\qquad \left(-\frac{5}{4}ax^2\right)\left(\frac{3}{10}x^3y\right)$

84 $12ab\left(-\frac{1}{2}a^3b^3\right)$ $\qquad \left(-\frac{15}{8}at^2\right)\left(\frac{6}{5}t^3x\right)$ $\qquad \left(\frac{12}{4}a^2n^2\right)\left(-\frac{7}{4}ax\right)$

85 $2{,}5ab^2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\cdot 1{,}5a$ $\qquad \left(-\frac{2}{9}xz\right)\left(-\frac{1}{4}z^3\right)(27x)$ $\qquad -8\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x^3a^4\right)$

►4. Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente

$$\textit{Potenza} = \textit{base}^{\textit{esponente}} = \underbrace{\textit{base}\cdot\textit{base}\cdot\textit{base}\cdot\dots\dots\cdot\textit{base}}_{\text{Tante volte quanto indica l'esponente}}$$

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

DEFINIZIONE. La **potenza di un monomio** è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempi

Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1 = -\frac{1}{2}a^2 b$.

$m_1 = -\frac{1}{2}a^2 b$ elevo al quadrato $\left(-\frac{1}{2}a^2 b\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b)^2 = \frac{1}{4}a^4 b^2$

$m_1 = -\frac{1}{2}a^2 b$ elevo al cubo $\left(-\frac{1}{2}a^2 b\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b)^3 = -\frac{1}{8}a^6 b^3$

Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2 = 5a^3 b^2 c^2$

$m_2 = 5a^3 b^2 c^2$ elevo al quadrato $(5a^3 b^2 c^2)^2 = (5)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^2)^2 = 25a^6 b^4 c^4$

$m_2 = 5a^3 b^2 c^2$ elevo al quadrato $(5a^3 b^2 c^2)^3 = (5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^2)^3 = 125a^9 b^6 c^6$

Procedura per eseguire la potenza di un monomio

- Applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio.

- Applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l’esponente della variabile per l’esponente delle potenza.

Esegui le potenze indicate

86 $(-3x^3 y^4 z)^2 = 9x^6 y^{\cdots} z^{\cdots}$ $\left(-\frac{3}{5}abx^3 y^5\right)^3 = \frac{\cdots}{\cdots}a^3 x^{\cdots} y^{\cdots}$

87 $(a^3 b^2)^8$ $(-a^4 b^2)^7$ $(-5ab^2 c)^3$

88 $(+2\text{a}\, x^3 y^2)^2$ $\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^3$ $\left(\frac{3}{4}x^4 y\right)^3$

89 $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$ $\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$ $\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$

90 $\left[(-rs^2 t)^2\right]^3$ $\left[\left(-\frac{1}{2}x^2 y^3\right)^2\right]^3$ $\left(-\frac{3}{2}a^2 b^3\right)^2$

►5. Addizione di due monomi

L’addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell’addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano addendi e il risultato si chiama somma.

1° caso: addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempio

Calcoliamo $3x^3 + (-6x^3)$.

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3 + (-6x^3) = (3 + (-6))x^3 = -3x^3$

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

91 Determina la somma dei monomi simili $8a^2 b + \left(-\frac{2}{3}\right)a^2 b + \frac{1}{6}a^2 b$

La somma è un monomio ………… agli addendi; il suo coefficiente è dato da $8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \ldots\ldots$

Quindi la somma = ………………

Proprietà della addizione:

- commutativa: $m_1+m_2=m_2+m_1$
- associativa: $m_1+m_2+m_3=(m_1+m_2)+m_3=m_1+(m_2+m_3)$
- 0 è l'elemento neutro: $0+m=m+0=m$
- per ogni monomio m esiste il monomio opposto, cioè un monomio m* tale che m + m* = 0.

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama differenza.

Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempio

Assegnati $m_1=\frac{1}{2}a^2b$ $\quad m_2=-5a^2b$ determina m_1-m_2

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b-(-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b+5a^2b=\frac{11}{2}a^2b$

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo "somma algebrica di monomi"

La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio

Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^4+x^4+\frac{4}{5}x^4-2x^4-\frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^4+x^4+\frac{4}{5}x^4-2x^4-\frac{1}{2}x^4=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+1+\frac{4}{5}-2-\frac{1}{2}\right)x^4=-\frac{13}{30}x^4$$

2° caso: addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2-5a^2b^3+a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.

Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2-5a^2b^3+a^3b^2=(7a^3b^2+a^3b^2)-5a^2b^3=8a^3b^2-5a^2b^3$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

92 Determina la somma $S=2a-3ab-a+17ab+41a$.

I monomi addendi non sono tra loro simili, modifico la scrittura dell'operazione applicando la proprietà associativa in modo da affiancare i monomi simili:

$$S=2a-3ab-a+17ab+41a=(\dots\dots\dots\dots)+(\dots\dots\dots\dots)=\dots\dots\dots\dots$$

La somma ottenuta non è un …………

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato **riduzione dei termini simili**.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempi

- Calcola la seguente somma: $s_1=3a-7a+2a+a$

s_1 è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili: $s_1=-a$

- Calcola la seguente somma: $s_2=\frac{1}{2}a^3+b-\frac{3}{4}a^3-\frac{6}{5}b$

s_2 non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $s_2=-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{5}b$

93 $5a^2b-3a^2b$ $\quad a^2b^2-3a^2b^2$

94 $-2xy^2+xy^2$ $\quad -3ax-5ax$

95 $5ab-2ab$ $\quad -3xy^2+3xy^2$

96 $-\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)-3ax^2$ $\quad -\frac{9}{2}xy-(-xy)$

97 $6xy^2+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{4}xy^2-6xy^2$ $\quad \frac{1}{2}xy^2+\frac{3}{2}xy^2$

98 $5ab-2ab+(-ab)-(+2ab)+ab$ $\quad 7xy^3-2xy^3$

99 $6ab-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}ab+4a^2$ $\quad \frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{2}a^3b^2$

100 $-\frac{4}{3}a^2b^3-2a^2b^3+\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^3$ $\quad -5x^2+3x^2$

101 $(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)+\frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$

102 $5x^3y^2+\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(x^3y^2)+\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$

►6. Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2\neq 0$, eseguire la divisione $d_1:d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme Q basta la condizione $d_2\neq 0$ per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio quoziente.

Esempio

■ $(36x^5y^2):(-18x^3y)$

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2)=q\cdot(-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q=-2x^2y$. Infatti $(-2x^2y)\cdot(-18x^3y)=(36x^5y^2)$. Il monomio q è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura per calcolare il quoziente di due monomi

Il quoziente di due monomi è così composto:

il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati

la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili

se la potenza di alcune delle lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.

Esempio

■ $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right):\left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$

Procediamo seguendo i passi sopra descritti:

$$\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right):\left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)=\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1}=-\frac{4}{3}a^2x^2y$$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione la Condizioni di Esistenza (**C.E.**): $\boldsymbol{C.E.}=a\neq 0\ e\ x\neq 0\ e\ y\neq 0$

Esempio

- $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$

Procediamo seguendo i passi sopra descritti con la **C.E.** a ≠ 0 et b ≠ 0:

$\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)=\left(\frac{9}{20}\right)\cdot(-8)a^{2-5}b^{4-2}=-\frac{18}{5}a^{-3}b^2$.

Osserva che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.

In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

103 Esegui le divisioni indicate e poni le C.E.:

$15b^8:\left(-\frac{40}{3}b^3\right)=$ $\quad\quad$ $\left(-\frac{13}{72}x^2y^5z^3\right):\left(-\frac{26}{27}xyz\right)=$

Determina il quoziente dei monomi

104 $q_1=(-12a^7b^5c^2):(-18ab^4c)$

$q_1=+\frac{2}{\dots}a^{\dots}bc$ $\quad$ C.E. a ≠ 0 e b ≠ … e c ≠ …

105 $q_2=\left(\frac{1}{2}a^3\right):(-4a^5)$ $\quad$ $q_2=-\frac{1}{8}a^{\dots}$ $\quad$ C.E. …… … … ...

106 $q_3=(-34x^5y^2):(-2yz^3)$ $\quad$ $q_3=+17x^{\dots}y^{\dots}z^{\dots}$ $\quad$ C.E. ……………

107 $q_4=(-a^7):(8a^7)$

108 Assegnati i monomi: $m_1=\frac{3}{8}a^2b^2$ $\quad m_2=-\frac{8}{3}ab^3$ $\quad m_3=-3a$ $\quad m_4=-\frac{1}{2}b$ $\quad m_5=2b^3$

Calcola il risultato delle seguenti operazioni, ponendo le opportune C.E.:

a) $m_1\cdot m_2\cdot(m_4)^2$ $\quad$ b) $-m_2\cdot m_1\cdot(m_3)^2\cdot m_5$

c) $(m_3\cdot m_4)^2-m_1$ $\quad$ d) $m3\cdot m_5-m_2$

e) $m_2:m_3+m_5$ $\quad$ f) $m_1:m_2$

109 Quando sottraiamo due monomi opposti otteniamo

[A] Il doppio del primo termine $\quad$ [B] Il doppio del secondo termine

[C] il monomio nullo $\quad$ [D] 0

110 Quando dividiamo due monomi opposti otteniamo:

[A] -1 $\quad$ [B] 0 $\quad$ [C]1 $\quad$ [D]il quadrato del primo monomio

111 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a.	La somma di due monomi opposti è il monomio nullo	V	F
b.	Il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti	V	F
c.	La somma di due monomi è un monomio	V	F
d.	Il prodotto di due monomi è un monomio	V	F
e.	L'opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo	V	F

►7. Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E=\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3:(a^5b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2$

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che compaiono sono monomi

Se volessimo calcolare il valore di E per a = 10 ; b = -2 dobbiamo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in una espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione poniamo innanzi tutto la C.E. a ≠ 0 e b ≠ 0 ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

$$E=\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3:(a^5b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2=\left(-\frac{1}{8}a^6b^3\right):(a^2b)+(-2ab)\cdot\frac{3}{2}b+5ab^2=$$

$=-\frac{1}{8}ab^2-3ab^2+5ab^2$ sommando i monomi simili otteniamo $\frac{15}{8}ab^2$

E è dunque un monomio e calcolare il suo valore è decisamente più semplice.

112 Calcola $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2:(-3ab^3)$ per $a=\frac{1}{2};\ b=-1;\ c=-2$

113 Calcola $-\frac{3}{5}x^2y^2\left(-\frac{10}{9}xz^2\right)(-15xy)-0,\bar{6}x^4yz(-0,\bar{7}xy^2z)$ per $x=-\frac{1}{3};\ y=-3;\ z=0,\bar{1}$

Esegui le operazioni tra monomi

114 $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^2+x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x\right)$

115 $\left(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x+x\right)-\left(2x-\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}x+x\right)$

116 $5a+\left\{-\frac{3}{4}a-\left[2a-\frac{1}{2}a+(3a-a)+0,5a\right]-a\right\}$

117 $-1,2x^2\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left[-0,1x(-5x)^2-(-5x^2)^2\right]$

118 $\left(-\frac{3}{4}x^4a^2b\right):\left(\frac{1}{2}x^2ab\right)+\frac{2}{3}x^2a$

119 $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2y^2\right):\left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$

120 $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b^2\right)^2-\left(+\frac{1}{3}b^2a\right)^2\right]:\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)\left(-\frac{2}{5}ab\right)$

121 $\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{7}{10}x\right)^2:\left(\frac{1}{3}x+x+\frac{3}{4}x\right)\right]^2:\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x\right)+\left[\left(-\frac{2}{3}abx\right)^2-\left(\frac{1}{3}abx\right)^2\right]:(a^2b^2x)$

122 $\left(\frac{1}{4}xy^2\right)\left(-\frac{16}{5}x^2y\right)-8x^2y^2(-2xy)-\frac{2}{5}x\left(-\frac{5}{3}x^2\right)(+3y^3x)+\left(\frac{12}{7}xy^2\right)\left(-\frac{7}{4}x^2y\right)$

R119. $\frac{9}{64}x^3y^3$ *R120.* $\left[\frac{a^2b^3(-5b+5a^2b^3+3x)}{45x}\right]$ *R121.* $\left[\frac{2812x}{1875}\right]$ *R122.* $\left[\frac{x^3y^3(10x+61)}{5}\right]$

3. POLINOMI

►1. Definizioni fondamentali

Un **polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi**.

Esempio

Sono polinomi: $6a+2b$; $5a^2b+3b^2$; $6x^2-5y^2x-1$; $7ab-2a^2b^3+4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in **forma normale** o **ridotto;** se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.
Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato **termine noto.**

Esempio

Il polinomio: $3ab+b^2-2ba+4-6ab^2+5b^2$; ridotto in forma normale diventa $ab+6b^2-6ab^2+4$. Il termine noto è 4

123 Riduci in forma normale il seguente polinomio: $5a^3-4ab-1+2a^3+2ab-a-3a^3$.
Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro $\overline{5a^3}\underline{-4ab}-1+\overline{2a^3}+\underline{2ab}-a-\overline{3a^3}$ *, in modo da ottenere………………. Il termine noto è …….*

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio.
Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempi

- $xy-5x^3y^2$ è un binomio;
- $3ab^2+a-4a^3$ è un trinomio;
- $a-6ab^2+3ab-5b$ è un quadrinomio.

Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono **uguali,** più precisamente vale il **principio di identità dei polinomi:** *due polinomi* $p(x)$ *e* $q(x)$ *sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.*
Se due polinomi sono invece formati da termini opposti, allora si dicono polinomi **opposti.**
Definiamo, inoltre, un polinomio **nullo** quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.

Esempi

- I polinomi: $\frac{1}{3}xy+2y^3-x$; $2y^3-x+\frac{1}{3}xy$ sono uguali.
- I polinomi: $6ab-3a^2+2b^2$; $3a^2-2b^3-6ab$ sono opposti.
- Il polinomio: $7ab+4a^2-ab+b^3-4a^2-2b^3-6ab-b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Il **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, **grado di un polinomio rispetto ad una data lettera** l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio.

Esempi

- Il polinomio $2ab+3-4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado.
- Il grado del polinomio $a^3+3b^2a-4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più alto con cui tale lettera compare è 3.

124 Individua il grado di

a) $x^2y^2-3y^3+5yx-6y^2x^3$ rispetto alla lettera y è … …, il grado complessivo è … ...

b) $5a^2-b+4ab$ rispetto alla lettera b è … …, il grado complessivo è … ...

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio

- Il polinomio: $a^3-b^3+ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

125 Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:

$$a)\ x^3y+2y^2x^2-4x^4;\quad b)\ 2x+3-xy;\quad c)\ 2x^3y^3-y^4x^2+5x^6$$

Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera,** quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio

- Il polinomio: $\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2y-2xy^2+\frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice **completo** se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempio

- Il polinomio: $x^4-3x^3+5x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

Osservazione

Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l’ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l’introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.

Per esempio, il polinomio $x^4-x+1+4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come: $x^4+0x^3+4x^2-x+1$.

126 Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti

$$a)\ 2-\frac{1}{2}x^2+x;\quad b)\ \frac{2}{3}-x+3x^2+5x^3;\quad c)\ 3x^4-\frac{1}{2}x^3+2x^2-x+\frac{7}{8}$$

127 Relativamente al polinomio $b^2+a^4+a^3+a^2$

Il grado massimo è …… Il grado rispetto alla lettera a è …… Rispetto alla lettera b è ……

Il polinomio è ordinato rispetto alla a? SI NO Completo? SI NO Omogeneo? SI NO

128 Scrivere un polinomio di terzo grado nelle variabili a e b che sia omogeneo.

129 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.

130 Scrivere un polinomio di quinto grado nelle variabili r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.

131 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.

132 Scrivere un polinomio di sesto grado nelle variabili x, y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

►2. Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.
In definitiva diciamo che la **somma di due o più polinomi è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.**

133 Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2+5-3y^2x,\quad x^2-xy+2-y^2x+y^3$
Svolgimento: Indichiamo la somma $\left(2x^2+5-3y^2x\right)+\left(x^2-xy+2-y^2x+y^3\right)$ *, eliminando le parentesi otteniamo il polinomio* $2x^2+5-3y^2x+x^2-xy+2-y^2x+y^3$ *, sommando i monomi simili otteniamo* $\ldots x^2-4x^{\cdots}y^{\cdots}-\ldots xy+y^3+\ldots$

La differenza di due polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo.

Esempio

$$3a^2+2b-\frac{1}{2}ab-\left(2a^2+ab-\frac{1}{2}b\right)=3a^2+2b-\frac{1}{2}ab-2a^2-ab+\frac{1}{2}b=a^2+\frac{-1-2}{2}ab+\frac{4+1}{2}b=$$
$$=a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{5}{2}b$$

Esegui le seguenti somme di polinomi

134 $a+b-b$ $\quad$ $a+b-2b$ $\quad$ $a+b-(-2b)$
135 $a-(b-2b)$ $\quad$ $2a+b+(3a+b)$ $\quad$ $2a+2b+(2a+b)+2a$
136 $2a+b-(-3a-b)$ $\quad$ $2a-3b-(-3b-2a)$ $\quad$ $(a+1)-(a-3)$
137 $\left(2a^2-3b\right)+\left(4b+3a^2\right)+\left(a^2-2b\right)$ $\quad$ $\left(3a^3-3b^2\right)+\left(6a^3+b^2\right)+\left(a^3-b^2\right)$
138 $\left(\frac{1}{5}x^3-5x^2+\frac{1}{5}x-1\right)-\left(3x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{1}{4}x-1\right)$
139 $\left(\frac{1}{2}+2a^2+x\right)-\left(\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}ax\right)+\left[-\left(-\frac{3}{2}-2ax+x^2\right)+\frac{1}{3}a^2\right]-\left(\frac{3}{2}ax+2\right)$ $\quad$ $R.\left[-x^2+x+\frac{29}{15}a^2\right]$
140 $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{6}ab\right)-\left(\frac{9}{8}ab+\frac{1}{2}a^2-2b\right)+ab-\frac{3}{4}a$ $\quad$ $R.\left[-\frac{a^2}{2}+\frac{7}{24}ab+\frac{5}{2}b\right]$

►3. Prodotto di un polinomio per un monomio

Consideriamo il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy+5x^3y^2$; indichiamo il loro prodotto con $\left(3x^2y\right)\cdot\left(2xy+5x^3y^2\right)$. Per eseguire tale moltiplicazione applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, otteniamo: $\left(3x^2y\right)\cdot\left(2xy+5x^3y^2\right)=6x^3y^2+15x^5y^3$.
Pertanto **il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.**
Nel caso in cui il monomio è nullo il risultato della moltiplicazione è il monomio nullo.

Esempio

- $\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{4}{3}xy^3\right)=\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+\left(3x^3y\right)\cdot\left(\frac{4}{3}xy^3\right)=\frac{3}{2}x^5y^3+4x^4y^4$

Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio:

141 $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)$ *Svolgimento:* $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)=\frac{3}{2}x^{\cdots}y^{\cdots}+\frac{1}{4}x^{\cdots}y^{\cdots}$.
142 (a + b)b $\quad$ (a - b)b $\quad$ (a + b)(-b)
143 (a – b + 51)b $\quad$ (-a – b - 51)(-b) $\quad$ $(a^2 - a)a$
144 $(a^2 - a)(-a)$ $\quad$ $(a^2 - a - 1)a^2$
145 $(a^2b - ab - 1)(ab)$ $\quad$ (ab– ab - 1)(ab)
146 $(a^2b - ab - 1)(a^2b^2)$ $\quad$ $(a^2b - ab - 1)(ab)^2$

147 $ab(a^2b - ab - 1)ab$ $\qquad$ $-2a(a^2 - a - 1)(-a^2)$

148 $\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{2}\right)(2a^2)$ $\qquad$ R. $\left[\frac{1}{2}a^6+\frac{1}{4}a^5+a^4\right]$

149 $(a^4+a^3+a^2)(b^4)$ $\qquad$ R. $[a^4b^4+a^3b^4+a^2b^4]$

150 $-\frac{1}{4}(2abx+2a^3b+3ax)+a^2(a+x)-\left[\left(\frac{1}{3}ax\right)^2-\left(\frac{2}{3}bx\right)^2\right]$

151 $3a\left[2(a-2ab)+3a\left(\frac{1}{2}-3b\right)-\frac{1}{2}a(3-5b)\right]$ $\qquad$ *R.* $\left[6a^2-\frac{63}{2}a^2b\right]$

►4. Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.
Si dice che un **polinomio è divisibile per un monomio**, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice **divisore** del polinomio.
Osservazioni

- Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero.
- Un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo.
- La divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio.
- Il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

Esempio

Eseguiamo la seguente divisione tra polinomio e monomio:

$$(6x^5y+9x^3y^2):(3x^2y)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy$$

Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi:

152 $(2x^2y+8xy^2):(2xy)$ *Svolgimento:* $(2x^2y+8xy^2):(2xy)=x^{\cdots}y^{\cdots}+4x^{\cdots}y^{\cdots}=$……………..

153 $(6x^5y^4+3x^3y^6):(3x^2y^4)$ *Svolgimento:* $(6x^5y^4+3x^3y^6):(3x^2y^4)=$……………………..

154 $(a^2+a):a$ $\qquad$ $(a^2-a):(-a)$

155 $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):2$

156 $(2a-2):\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}\right):\frac{a}{2}$

157 $(a^2-a):a$ $\qquad$ $(a^3+a^2-a):a$

158 $(8a^3+4a^2-2a):2a$ $\qquad$ $(a^3b^2+a^2b-ab):b$

159 $(a^3b^2-a^2b^3-ab^4):(-ab^2)$ $\qquad$ $(a^3b^2+a^2b-ab):ab$

160 $(16x^4-12x^3+24x^2):(4x^2)$ $\qquad$ $(-x^3+3x^2-10x+5):(-5)$

161 $[(-3a^2b^3-2a^2b^2+6a^3b^2):(-3ab)]\cdot\left(\frac{1}{2}b^2\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{4}{3}a^2b^3-\frac{3}{4}a^3b^2\right):\left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right)$

162 $\left(2a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{4}\right):\left(\frac{a}{2}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{8}\right):\left(\frac{1}{2}a\right)$

163 $(16a^{n+1}b^{n+2}-2a^{2n}b^{n+3}+5a^{n+2}b^{n+1}):(2a^nb^n)$ $\qquad$ $(6a^{3n+1}-6a^{2n}):(-6a^n)$

►5. Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Consideriamo ora due polinomi $\left(a^2b+3a-4ab\right)$ e $\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$, eseguiamo il prodotto, si ha

$$\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+\underline{3a^3b^3}+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2-\underline{2a^3b^3}+4a^2b-12a^2b^3$$

riducendo i termini simili otteniamo $\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3$.

Esempi

- $\left(x-y^2-3xy\right)\cdot\left(-2x^2y-3y\right)$

  Procediamo moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo
  $\left(x-y^2-3xy\right)\left(-2x^2y-3y\right)=-2x^3y+3xy+2x^2y^3-3y^3+6x^3y^2-9xy^2$.
  In questo caso non ci sono termini simili e quindi l'operazione è completata.

- $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x+1\right)$

  $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)=\frac{3}{8}x^4+\underline{\frac{1}{2}x^3}-\underline{\frac{3}{2}x^3}-2x^2$, riduciamo i termini simili, otteniamo
  $\frac{3}{8}x^4-x^3-2x^2$.

Esegui i seguenti prodotti di polinomi

164 $\left(-4x+\frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$ *Svolgimento:* $-8x^{\cdots}+12x^{\cdots}-\ldots x+x^{\cdots}-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{4}x^{\cdots}=$

165 $\left(x^3-x^2+x-1\right)(x.-1)$ $\qquad$ $\left(3x^3+2x^2+x+1\right)(1-x)$

166 $\left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)$ $\qquad$ $(a-1)(a-2)(a-3)$

167 $(a+1)(2a-1)(3a-1)$ $\qquad$ $(a+1)\left(a^2+a\right)\left(a^3-a^2\right)$

Esercizi sui prodotti di polinomi con esponenti letterali

168 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ R. $\left[a^{4n+4}-2a^{2n+3}+2a^{2n+2}-a^{2n+1}\right]$

169 $\left(a^n-a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^{n-1}\right)$ R. $\left[a^{2n+3}-a^{2n+2}-a^{2n-1}+a^{2n}\right]$

170 $\left(a^n+a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ R. $\left[-a^{2n}+a^{2n+3}\right]$

171 $\left(a^{n+2}+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}+a^{n+2}\right)$ R. $\left[a^{2n+4}+2a^{2n+3}+a^{2n+2}\right]$

172 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}-2\right)$ R. $\left[a^{2n+2}-a^{n+1}-2\right]$

Esercizi di ripetizione sui polinomi

173 $(-a-1-2)-(-3-a+a)$ R. $[-a]$

174 $\left(2a^2-3b\right)-\left[\left(4b+3a^2\right)-\left(a^2-2b\right)\right]$ R. $[-9b]$

175 $\left(2a^2-5b\right)-\left[\left(2b+4a^2\right)-\left(2a^2-2b\right)\right]-9b$ R. $[-18b]$

176 $\left(\frac{1}{2}a-3+a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$ R. $\left[-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}a^3\right]$

177 $\left(5x+3xy+\frac{1}{2}y^2\right)\left(3x^2y\right)$ R. $\left[15x^3y+9x^3y^2+\frac{3}{2}x^2y^3\right]$

178 $\left(\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}xy\right)(6xy)$ R. $\left[4x^2y^3+3x^4y-\frac{9}{2}x^2y^2\right]$

179 $\left(a^3b^2-a^4b+a^2b^3\right):\left(a^2b\right)$ R. $\left[ab-a^2+b^2\right]$

180 $\left(a^2-a^4+a^3\right):\left(a^2\right)$ R. $\left[1-a^2+a\right]$

181 $\left(\frac{1}{2}a^2b-2ab^2+\frac{3}{4}a^3b\right):\left(\frac{1}{2}ab\right)$ R. $\left[a-4b+\frac{3}{2}a^2\right]$

182 $2(x-1)(3x+1)-\left(6x^2+3x+1\right)+2x(x-1)$ R. $\left[2x^2-9x-3\right]$

183 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)a^3-\left(\frac{1}{3}ab-1\right)\left[2a^2(a-b)-a\left(a^2-2ab\right)\right]$ R. $\left[a^4-\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{3}a^4b+a^3\right]$

184 $\left(3x^2+6xy-4y^2\right)\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$ R. $\left[\frac{3}{2}x^3y+x^2y^2-6xy^3+\frac{8}{3}y^4\right]$

185 $\frac{1}{2}x\left[\left(x-y^2\right)\left(x^2+\frac{1}{2}y\right)-5x\left(-\frac{1}{10}xy\right)(4y)\right]-\frac{1}{2}x\left(x^3y+\frac{1}{2}xy^2\right)$

R. $\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{2}x^3y^2-\frac{1}{4}xy^3-\frac{1}{2}x^4y-\frac{1}{4}x^2y^2\right]$

186 $(2a-3b)\left(\frac{5}{4}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{6}b^2\right)-\frac{1}{6}a\left(12a^2-\frac{18}{5}b^2\right)+\frac{1}{3}(-b)^3$ R. $\left[\frac{1}{2}a^3-\frac{11}{4}a^2b-\frac{37}{30}ab^2+\frac{1}{6}b^3\right]$

187 $\left(\frac{2}{3}a-2b\right)\left(\frac{3}{2}a+2b\right)\left(\frac{9}{4}a^2+4b^2\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{9}{4}a^2\right)$

R. $\left[\frac{9}{4}a^4-5a^2b^2-\frac{15}{4}a^3b-\frac{20}{3}ab^3-16b^4-\frac{27}{16}a^2\right]$

188 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right):\left(a^{1+n}\right)$ R. $\left[1-a+a^2\right]$

189 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(1-a^{n-1}\right)$

190 $\left(a^{n+1}-a^n\right)\left(a^{n+1}+a^n\right)\left(a^{2n+2}+a^{2n}\right)$ R. $\left[a^{4n+4}-a^{4n}\right]$

191 $\left(\frac{1}{2}x^n-\frac{3}{2}x^{2n}\right)\left(\frac{1}{3}x^n-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}x^n-1\right)\left(x^n+x\right)$ R. $\left[\frac{7}{12}x^{2n}+\frac{3}{4}x^n-\frac{1}{2}x^{3n}-\frac{1}{3}x^{n+1}+x\right]$

Rispondi alle seguenti domande

192 Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

193 Se si raddoppiano i lati di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

194 Se si raddoppiano gli spigoli a, b, e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

195 Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

196 Determinare l'area di un rettangolo avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2b$.

197 Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base x^2y e altezza $\frac{1}{5}xy^2$.

4. PRODOTTI NOTEVOLI

Il prodotto fra due polinomi si calcola moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine dell'altro e sommando poi i monomi simili. Talvolta i polinomi da moltiplicare presentano delle caratteristiche per le quali dopo aver eseguito la moltiplicazione ed aver ridotto i termini simili, si ottiene un'espressione algebrica in cui lo schema di calcolo rimane invariato. Tali prodotti vengono chiamati **prodotti notevoli**. In questi casi è utile, dopo avere individuato uno specifico prodotto notevole e averne dimostrato la validità, scrivere direttamente il risultato evitando i passaggi intermedi.
Con l'espressione **prodotti notevoli si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi le quali hanno caratteristiche particolari facili da ricordare**.

►1 Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio A+B in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede **moltiplicando il binomio per se stesso**, eseguendo cioè la moltiplicazione $(A+B)(A+B)$ che sotto forma di potenza si scrive $(A+B)^2$.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

(1) $\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2}$

Espressa nel linguaggio comune: **il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.**
Analizzando il prodotto ottenuto si può notare che è costituito da tre termini ed in particolare due termini sono costituiti dal prodotto di ciascun monomio per se stesso, un termine è costituito dal prodotto dei due monomi moltiplicato a sua volta per 2.
Nella identità precedente, A e B rappresentano due monomi qualsiasi, quindi la scrittura $A+B$ deve intendersi come somma algebrica di due monomi che, rispetto al segno, possono essere concordi o discordi.
Ne consegue che:

- ✓ A^2 e B^2 sono sempre positivi perché prodotto di fattori uguali e quindi concordi.
- ✓ 2AB è positivo se A e B sono concordi, negativo se sono discordi.

198 $(3x + y)^2$ $= [(3x) + (y)]^2$ $= (3x)(3x) + 2(3x)(y) + (y)(y)$ $= 9x^2 + 6xy +$…

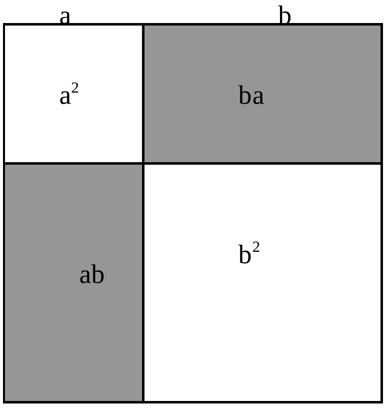
199 $(-3x + y)^2$ $= [(-3x) + (y)]^2$ $= (-3x)(-3x) + 2(-3x)(y) + (y)(y)$ = … … …

200 $(-3x - y)^2$ $= [(-3x) + (-y)]^2$ $= (-3x)(-3x) +$ ……… $= 9x^2 + 6xy + y^2$

201 $(3x - y)^2$ $= [(3x) + (- y)]^2$ = …… ……… …… = … … …

202 $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)(3y)+(3y)^2=$………………

203 $\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)^2=(x^2)^{\cdots}+2\cdot(\ldots\ldots)(-\ldots\ldots)+\left(-\frac{1}{2}y\right)^{\cdots}=$………………



È possibile dare anche un'interpretazione geometrica della formula $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ sostituendo A e B rispettivamente con le misure a e b di due segmenti.
Prendiamo due segmenti di lunghezza *a* e *b*, portiamo a coincidere il secondo estremo del segmento lungo *a* con il primo estremo del segmento di lunghezza *b*: in questo modo otteniamo un segmento di lunghezza $a+b$. Costruiamo il quadrato di lato $a+b$, il quale avrà area $(a+b)^2$, e dividiamolo come nella figura a fianco.
Puoi notare che il quadrato di lato $a+b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area *ab*. Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ab=a^2+b^2+2ab$$

204 Disegna un quadrato il cui lato è composto da due segmenti lunghi rispettivamente 3cm e 5cm. Esegui la scomposizione del quadrato in modo analogo a come fatto per la figura 1 e verifica la seguente uguaglianza: $(3+5)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 5+5^2$.

Sviluppa i seguenti quadrati di binomio

205 $(x+1)^2$ $(x+2)^2$ $(x-3)^2$ $(2x-1)^2$

206 $(x+y)^2$ $(x-y)^2$ $(2x+y)^2$ $(x+2y)^2$

207 $(-a+b)^2$ $(-a-1)^2$ $(-a+3)^2$ $(-a+2b)^2$

208 $(2a+3b)^2$ $(2a-3b)^2$ $(3a+2b)^2$ $(-2+3b)^2$

209 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2$ $\left(-2x^2-\frac{7}{4}y\right)^2$ $\left(5x^3-\frac{4}{3}y^2\right)^2$ $\left(-1+\frac{3}{2}a^2x\right)^2$

210 $\left(3a-\frac{1}{3}a^2\right)^2$ $\left(-2-\frac{1}{2}x\right)^2$ $(x+1)^2$ $(a^2+a^n)^2$

211 $\left(x^{2n}-\frac{1}{2}x^n\right)^2$ $(x^{n+1}+x^n)^2$ $\left(-2^2-\frac{1}{2}x^n\right)^2$ $\left(-2x^{2n}-\frac{1}{4}y^m\right)^2$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi

212 $a^2+4ab+4b^2$ SI NO $a^2-2ab-b^2$ SI NO

213 $25a^2+4b^2-20ab^2$ SI NO $\frac{49}{4}a^4-21a^2b^2+9b^2$ SI NO

214 $-25a^4-\frac{1}{16}b^4+\frac{5}{2}a^2b^2$ SI NO $\frac{1}{4}a^6+\frac{1}{9}b^4+\frac{1}{6}a^3b^2$ SI NO

►2 Quadrato di un polinomio

Si consideri il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà dato da:

$$(A+B+C)^2=(A+B+C)\cdot(A+B+C)=A^2+AB+AC+BA+B^2+BC+CA+C^2=$$
$$=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si può scrivere

(2) $\boxed{(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC}$

In generale, **il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi**.
Nel caso di un polinomio composto da quattro monomi si ha:

$$(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$$

Completa i seguenti quadrati

215 $(x+3y-1)^2=x^2+\ldots\ldots+1+6xy-2x-6y$

216 $\left(x^2-\frac{1}{2}y+1\right)^2=x^4+\frac{1}{4}y^2+\ldots\ldots-x^2y+\ldots\ldots-y$

217 $\left(2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\ldots\ldots+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}-2x^{\cdots}+2x^{\cdots}-\frac{\ldots}{\ldots}\ldots$

Calcola i seguenti quadrati di polinomi

218 $(a+b-c)^2$ $(a-b+c)^2$

219 $(x^2+x+1)^2$ $(x-x^2+1)^2$

220 $(3x^2+2z-y^2)^2$ $(-a+b-c)^2$

221 $(6a-3y^3-2z^2)^2$ $(1-x-x^2)^2$

222 $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x\right)^2$ $\left(3x^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}\right)^2$

223 $(-2ba+4-6ab^2+5b^2)^2$ $(2ab+3-4a^2b^2-2b^3)^2$

224 $\left(5a^3-\frac{1}{2}ab-1-a\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}x+2y^2-3\right)^2$

225 $\left(\frac{2}{3}y^2-3x^4+\frac{7}{4}z\right)^2$ $\left(2a+\frac{1}{2}ab^2-3b\right)^2$

226 $\left(2x^3y^2-y^2x+5x^2+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2x-2xy+\frac{3}{8}y\right)^2$

►3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$

Pertanto, quando eseguiamo il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti i prodotti incrociati si annullano e rimangono i due prodotti del termine uguale per se stesso e dei due termini opposti, il primo prodotto risulterà sempre positivo, il secondo prodotto risulterà sempre negativo. Senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(3) $\boxed{(A+B)(A-B)=A^2-B^2}$

In generale, **il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti si ottiene semplicemente moltiplicando tra di loro i due termini uguali e i due termini opposti.**.

Esempi

- $(3a^2+5ab)\cdot(3a^2-5ab)$

  Moltiplichiamo $3a^2$ per se stesso e $(+5ab)(-5ab)$, otteniamo $9a^2-25a^2b^2$
- $\left(-\frac{1}{4}x^2+b\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}x^2+b\right)$

  Osserviamo che il monomio che cambia di segno è $\frac{1}{4}x^2$, nella forma generale (3) occorre porre

  $A=b$; $B=\frac{1}{4}x^2$. Il risultato è quindi $A^2-B^2=b^2-\frac{1}{16}x^4$.
- Senza utilizzare la calcolatrice, calcola mentalmente il prodotto $28\cdot 32$.

  Svolgimento $28\cdot 32=(30-2)(30+2)=900-4=896$

Senza utilizzare la calcolatrice, calcolare mentalmente i seguenti prodotti:

227 $18\cdot 22$ $15\cdot 25$ $43\cdot 37$ $195\cdot 205$

Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

228 $(x-1)(x+1)$ $(a+1)(a-1)$ $(b-2)(b+2)$

229 $(a+2b)(a-2b)$ $(2a+b)(2a-b)$ $(2a+3b)(2a-3b)$

230 $\left(l+\frac{1}{2}m\right)\left(l-\frac{1}{2}m\right)$ $\left(\frac{1}{2}u+v\right)\left(\frac{1}{2}u-v\right)$

231 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$ $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)$

232 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $(3a-5y)(-3a-5y)$

233 $\left(x^2+\frac{1}{2}z\right)\left(x^2-\frac{1}{2}z\right)$ $\left(\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)\left(-\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)$

234 $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)$ $\left(-2a^3-\frac{7}{3}y\right)\left(-2a^3+\frac{7}{3}y\right)$

235 $\left(5x^2-\frac{6}{5}y^3\right)\left(5x^2+\frac{6}{5}y^3\right)$ $\left(a^5+\frac{1}{2}y^4\right)\left(a^5-\frac{1}{2}y^4\right)$

236 $\left(-\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)$ $\left(2x^5+\frac{3}{2}y^5\right)\left(2x^5-\frac{3}{2}y^5\right)$

►4 Cubo di un Binomio

Si consideri il binomio $A+B$, il suo cubo sarà dato da:

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)$$
$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)=A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3=$$
$$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Pertanto, senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(4) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

In generale, **il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio**.

Essendo $(A-B)^3=[A+(-B)]^3$, il cubo della differenza di due monomi si ottiene facilmente dal cubo della somma, quindi $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

237 $(2a+b^2)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b^2+3(2a)\cdot(b^2)^2+(b^2)^3=$……………………………

238 $(x-2y)^3=x^{\cdots}-6x^{\cdots}y+12xy^{\cdots}-\ldots y^{\cdots}$

239 $(x+y)^3$ $(x-y)^3$ $(-x+y)^3$

240 $(a+1)^3$ $(a-1)^3$ $(a+2)^3$

241 $(x+2y)^3$ $(y-2x)^3$ $(2x+y)^3$

242 $(xy-1)^3$ $(x^2-2y)^3$ $(x^2y-3)^3$

243 $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$ $\left(a-\frac{2}{3}b\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$

244 $(x^2-y^2)^3$ $\left(-3xy^2+\frac{3}{2}zx^2\right)^3$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}xy^2z^3\right)^3$

245 $\left(2x^2z+\frac{2}{3}y^2z^3x\right)^3$ $(2ab^2c^2-3a^3b)^3$ $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c^2-\frac{1}{3}a^2bc^2\right)^3$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono cubi di binomi

246 $-a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ SI NO

247 $a^9-6a^4b-12a^2b^2-8b^3$ SI NO

248 $8a^9-b^3-6b^2a^3+12a^6b$ SI NO

249 $\frac{1}{27}a^6-8b^3+4a^2b^2-\frac{2}{3}a^4b$ SI NO

►5 Potenza n-esima di un binomio

Finora abbiamo calcolato le potenze del binomio $a+b$ fino all’ordine tre, in questo paragrafo ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n\in\mathbb{N}$. Osserviamo le potenze ottenute:

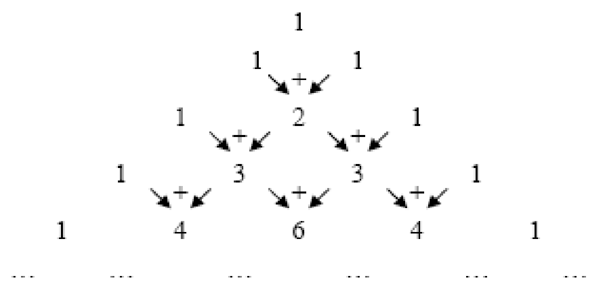
$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell’esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto ***triangolo di Tartaglia***.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
… … … … … … …

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l’ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente. Nella figura che segue evidenziamo come costruire il triangolo:



Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

- $(a+b)^0=1$
- $(a+b)^1=a+b$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Sviluppa le seguenti potenze di binomio

250 $(2a-b^2)^4=(2a)^4+4\cdot(2a)^3\cdot(-b^2)+6(2a)^2\cdot(-b^2)^2+\ldots(2a)\cdot(-b^2)^{\cdots}+(-b^2)^{\cdots}$

251 $(a+1)^5$ $(x-1)^6$ $(1-y)^7$ $(a+2)^5$

252 $(a-2)^6$ $(2a-1)^2$ $(3x^2a-a^2)^5$ $(2x^2-1)^6$

253 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^4$ $\left(\frac{1}{2}a-1\right)^4$ $\left(2-\frac{1}{2}a\right)^5$ $\left(\frac{1}{3}-2x\right)^5$

►6 Prodotti notevoli applicati ai polinomi

Tutti i procedimenti di calcolo presentati in questo paragrafo si applicano non soltanto a monomi ma anche a polinomi.

Esempi

- Per calcolare $(a+2b-3c)^2$ possiamo anche applicare la regola (1) del quadrato del binomio dove $A=a+2b$ e $B=-3c$, si ottiene $(a+2b)^2+2(a+2b)(-3c)+(-3c)^2$, ecc.
- Per calcolare $(a+b+2c)\cdot(a+b-2c)$ possiamo applicare la regola (3) ponendo $A=a+b$ e $B=2c$, quindi il risultato A^2-B^2 diventa $(a+b)^2-(2c)^2$, sviluppando i quadrati si ottiene $a^2+2ab+b^2-4c^2$.
- Per calcolare $(a^3+2ab-b^2)\cdot(a^3-2ab+b^2)$ possiamo riscrivere il prodotto come $\left[a^3+(2ab-b^2)\right]\cdot\left[a^3-(2ab-b^2)\right]$, quindi moltiplicando soltanto il monomio uguale per se stesso e i binomi opposti $(a^3)^2-(2ab-b^2)^2=a^6-(4a^2b^2-4ab^3+b^4)=a^6-4a^2b^2+4ab^3-b^4$

254 $[a+2(b-c)][a-2(b-c)]$ R. $[a^2-4b^2+8bc-4c^2]$

255 $[(a-2b)^2-a^3][-a^3-(a-2b)]$ R. $[-a^4+8a^3b-24a^2b^2+32ab^3-16b^4+a^6]$

256 $[(x+2y)^2-(x^2-2y)^2][(x+2y)^2+(x^2-2y)^2]$ R. $[8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4+...]$

257 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}-3b+\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}-3b-\frac{1}{3}ab\right)$ R. $\left[\frac{1}{4}a^2-\frac{31}{9}ab-\frac{4}{9}+9b^2-\frac{1}{9}a^2b^2\right]$

258 $\left(a-\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{5}-5ab\right)$

259 $(x-y)^2+(x+y)(y-x)$ R. $[2y^2-2xy]$

260 $(a-3b)^2+(2a+3b)(2a-3b)-(a+2b)(b-2a)$ R. $[7a^2-3ab-2b^2]$

261 $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(2x+\frac{1}{2}y^2\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(-x+\frac{1}{2}y\right)+(x-y)^3$

R. $\left[-4x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+xy^2-\frac{1}{4}y^4+x^3-3x^2y-y^3\right]$

262 $(a+2b-3c)(a+2b+3c)(a^2-b)(-a^2-b)+(2a-b)^3$

263 $[3x^2-(x+2y)(x-2y)]^2-2x\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y\right)^2$ R. $\left[4x^4+16x^2y^2+16y^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2y-\frac{9}{2}xy^2\right]$

264 $\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{3}yx\right)^2+\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{4}{5}y^2x\right)^2$

R. $\left[\frac{1}{4}x^6+\frac{7}{3}x^4y+\frac{49}{9}x^2y^2+\frac{4}{9}x^4y^2-\frac{16}{15}x^2y^3z+\frac{16}{25}y^4z^2\right]$

265 $\left(x^2+yx+\frac{2}{3}\right)^2-\left(3b^2+\frac{1}{2}a^4+2a^3+\frac{1}{3}a^2\right)^2$

266 $\left(3x^2-4xy+\frac{2}{5}-y^2x+\frac{1}{2}y^3\right)^2+\left(2x^2y^2+\frac{3}{2}y^2\right)\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}y^2\right)$

267 $\left(\frac{2}{5}zx^3-3x^2y\right)\left(\frac{2}{5}zx^3+3x^2y\right)+\left(2x^2y^2z^3+\frac{1}{2}z^2x^2y\right)^3$

268 $(1-x^n)^2-(2x^n-1)^2-(2x^{n+1})^2+(x^{2n}-1)(x^{2n}+1)$ R. $[-1+2x^n-3x^{2n}-4x^{2n+2}+x^{4n}]$

269 Trova una regola generale per calcolare il cubo di un trinomio $(A+B+C)^3$

5. DIVISIONE TRA DUE POLINOMI

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio 147:4. Si tratta di trovare un quoziente q e un resto r < 4, in modo che $147 = q \times 4 + r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:

$$\begin{array}{r|l} 147 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{12\ \,} & 36 \\ 27 & \\ \underline{24} & \\ 3 & \end{array}$$

dividendo, divisore, quoziente, resto

Verifichiamo che $147 = q \times 4 + 3$, dunque $q = 36$ e $r = 3$ soddisfano la nostra richiesta.
In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

►1. Polinomi in una sola variabile

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio x, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, **A(x) dividendo** e **B(x) divisore**, vogliamo determinare altri due polinomi, **Q(x) quoziente** e **R(x) resto**, con grado di R(x) minore del grado di B(x), per i quali:

A(x) = B(x)·Q(x) + R(x).

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamo l'algoritmo con un esempio.

Esempio

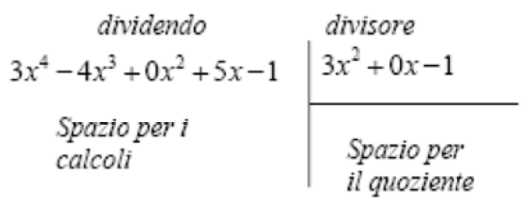
■ Vogliamo eseguire la divisione tra i polinomi $A(x) = 3x^4 + 5x - 4x^3 - 1$ e $B(x) = 3x^2 - 1$.

Prima di eseguire l'algoritmo **dobbiamo sempre controllare**:
- che il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore.
Vero: $A(x)$ è di grado 4, $B(x)$ è di grado 2.
- che i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile.
Poiché ciò non è vero per $A(x)$ lo riscriviamo ordinato: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$.
- che dividendo e divisore siano in forma completa.
Nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti:

$$A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 1 \qquad B(x) = 3x^2 + 0x - 1$$

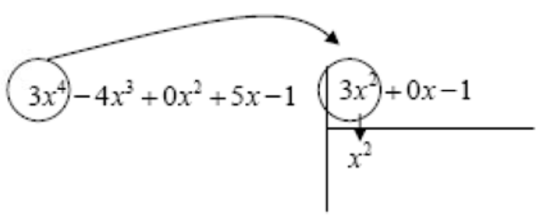
Passo 1

Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.



Passo 2

Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore , otteniamo che è il primo termine del quoziente e va riportato nello spazio dedicato al quoziente



Passo 3

Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:

- incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
- cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2 \end{array}$$

Passo 4

Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & \end{array}$$

Passo 5

Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto $-4x^3+x^2+5x-1$ e il divisore $3x^2+0x-1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & x^2-\frac{4}{3}x \end{array}$$

Passo 6

Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto cambiandolo di segno sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & x^2-\frac{4}{3}x \\ -4x^3+0x^2-\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-1} x^2+\frac{11}{3}x-1 & \end{array}$$

Passo 7

Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x)=x^2+\frac{11}{3}x-1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è x^2 , per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \\ -4x^3+0x^2-\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-1} x^2+\frac{11}{3}x-1 & \\ -x^2+0x+\frac{1}{3} & \\ \cline{1-1} +\frac{11}{3}x-\frac{2}{3} & \end{array}$$

Non possiamo più ripetere l'algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x):B(x)$ ha quoziente $Q(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ e resto $R(x)=+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$.

Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra:

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$$

$$(3x^2-1)\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3}x=3x^4-4x^3-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}=$$
$$=3x^4-4x^3+\frac{15}{3}x-\frac{3}{3}=x^4-4x^3+5x-1=A(x)$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? E' sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il

TEOREMA DELLA DIVISIONE EUCLIDEA. Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con gradi di $R(x)$ minore o uguale del grado di $B(x)$, tali che $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

Osservazioni

- Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x)=0$ e $R(x)=A(x)$.
- Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

DEFINIZIONE. Si dice che un polinomio A (dividendo) è divisibile per un polinomi B o (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A=Q\cdot B$.

Esempio

- Eseguiamo la divisione tra $A(x)=x^3-2x^2+x-2$ *e* $B(x)=x^2+1$

I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di *A* è maggiore del grado di *B* e quest'ultimo deve essere completo. Inseriamoli nella schema per eseguire l'algoritmo. Risulta:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+x-2 & x^2+0x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-0x^2-x & x-2 \\ \hline -2x^2+0x-2 & \\ -2x^2+0x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quindi $(x^3-2x^2+x-2):(x^2+1)=(x-2)$ e il resto R(x) è il polinomio nullo.

Infatti $(x^2+1)\cdot(x-2)=(x^3-2x^2+x-2)$.

Conclusione

Sia $A(x)$ un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado m con $n\geq m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n-m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g<m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B.

Se $n<m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

In quali dei seguenti casi il quoziente è un polinomio?

270 $(xy-y):y$ SI NO

271 $(x^2y-3y):x$ SI NO

272 $(2xy+x^2):x$ SI NO

273 Completa la divisione

$$\begin{array}{l|l} 7x^4+0x^3-5x^2+x-1 & 2x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} \dots & \frac{7}{2}x^2\dots \\ \hline -\frac{3}{2}x^2+x-1 & \\ \dots & \\ \hline x-\frac{7}{4} & \end{array}$$

Esegui le divisioni

274 $(3x^2-5x+4):(2x-2)$ $\left[Q(x)=\frac{3}{2}x-1;\ R(x)=2\right]$

275 $(4x^3-2x^2+2x-4):(3x-1)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{16}{27};\ R(x)=-\frac{92}{27}\right]$

276 $(5a^3-a^2-4):(a-2)$ $\left[Q(x)=5a^2+9a+18;\ R(x)=32\right]$

277 $(6x^5-5y^4+y^2-1):(2y^2-3)$ $\left[Q(x)=3y^3-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{2}y-\frac{13}{4};\ R(x)=\frac{27}{2}y-\frac{43}{4}\right]$

278 $(-7a^4+3a^2-4+a):(a^3-2)$ $\left[Q(x)=-7a;\ R(x)=a^2-13a-4\right]$

279 $(x^7-4):(x^3-2x^2+3x-7)$ $\left[Q(x)=x^4+2x^3+x^2+3x+17;\ R(x)=32x^2-30x+115\right]$

280 $\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{3}{2}\right):(x^2+3x)$ $\left[Q(x)=x-\frac{7}{2};\ R(x)=\frac{13}{2}x+\frac{3}{2}\right]$

281 $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2-5x+\frac{3}{5}\right):\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ $\left[Q(x)=x^3-\frac{20}{3}x^2-\frac{81}{2}x-253;\ R(x)=\frac{3798}{5}\right]$

282 $(6-7a+3a^2-4a^3+a^5):(1-2a^3)$ $\left[Q(x)=2-\frac{1}{2}a^2;\ R(x)=\frac{7}{2}a^2-7a+4\right]$

►2. Polinomi in più variabili

Per la divisione tra polinomi in più variabili riportiamo soltanto qualche esempio.
Siano $A(a,b)=3a^2b+4ab^2+3a^3-2b^3$ e $B(a,b)=a-3b$ rispettivamente dividendo e divisore di una divisione tra polinomi; essi sono due polinomi omogenei nelle due variabili a e b rispettivamente di grado 3 e grado 1. Per eseguire la divisione procediamo come nel caso di polinomi in una sola variabile.

283 Dividiamo il polinomio $A(a,b)=3a^2b+4ab^2+3a^3-2b^3$ per il polinomio $B(a,b)=a-3b$ rispetto alla variabile *a*. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile a? No.
  A non lo è. Quindi ordiniamo A: $A(a,b)=3a^3+3a^2b+4ab^2-2b^3$
- Il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì
- A e B sono completi rispetto alla variabile a? Sì

Costruiamo lo schema per eseguire l'algoritmo e procediamo:
Il quoziente è Q = ……………….. ; il resto R = $118b^3$

$$\begin{array}{l|l} 3a^3+3a^2b+4ab^2-2b^3 & a-3b \\ \cline{2-2} & 3a^2-\dots \\ \hline & \end{array}$$

Verifica …………………….………………………..

Se avessimo eseguito la divisione rispetto alla variabile b, avremmo ottenuto stesso quoziente e stesso resto? Proviamo.

Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile b? No.

Ordiniamo A, risulta $A(a,b)=-2b^3+4ab^2+3a^2b+3a^3+3a^2b$; ordiniamo B, risulta .

- $B(a,b)=-3b+a$ Il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì
- A e B sono completi rispetto alla variabile b? Sì

Costruisci lo schema dell'algoritmo e concludi.

284 Dividi il polinomio $A(x,y)=x^3+3x^2y+2xy^2$ per il polinomio $B(x,y)=x+y$ rispetto alla variabile x.
Il quoziente è Q(x,y) = … … … … …, il resto è R(x,y) = 0.
Ordina il polinomio A(x,y) in modo decrescente rispetto alla variabile y ed esegui nuovamente la divisione. Il quoziente è sempre lo stesso? Il resto è sempre zero?

►3. Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi, nel caso in cui il divisore sia di grado 1 si può applicare una regola nota come regola di Ruffini e che si basa sui seguenti teoremi.

TEOREMA. Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x-k$ è uguale al valore che $A(x)$ assume quando al posto della variabile x si sostituisce il valore k, $R=A(k)$.

Dimostrazione
Dalla divisione di $A(x)$ per $x-k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x)=(x-k)\cdot Q(x)+R$$

in cui si è preferito scrivere *R* anziché *R(x),* poiché è una costante.
Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile *x*, sostituiamo al suo posto il valore *k* e otteniamo:

$$A(k)=\underbrace{(k-k)}_{0}\cdot Q(k)+R=R$$

Ciò vuol dire che il valore assunto da $A(x)$ quando $x=k$ è proprio uguale al resto della divisione.

Dimostriamo ora il *Teorema di Ruffini*.

TEOREMA DI RUFFINI. Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $x-k$ è che risulti $A(k)=0$.

Dimostrazione
Prima implicazione: $A(x)$ divisibile per $x-k$ $\Rightarrow$ $A(k)=0$.
Poiché $A(x)$ è divisibile per $x-k$, per definizione di divisibilità deve essere $R=0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k)=R=0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(k)=0$.
Seconda implicazione: $A(k)=0$ $\Rightarrow$ $A(x)$ divisibile per $x-k$.
Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x-k$, per il teorema del resto risulta $R=A(k)$ e per ipotesi $A(k)=0$, ne segue che $R=0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione pari a zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $x-k$.

Procedura per dividere un polinomio con la regola di Ruffini
- **calcolo del resto**
- **applicazione del procedimento di divisione**
- **verifica**

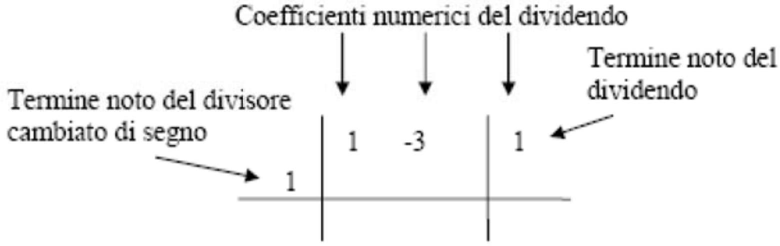
Esempio

- $(a^2-3a+1):(a-1)$

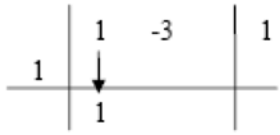
Dividiamo con la regola di Ruffini il polinomio $A(a)=a^2-3a+1$ per il binomio $B(a)=a-1$; cerchiamo quoziente $Q(a)$ e resto $R(a)$.
Passo 1 *Calcolo del polinomio resto*
Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è 1) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo $A(a)$: $(1)^2-3(1)+1=1-3+1=-1$
Il resto della divisione è -1.

Passo2 *Applicazione del procedimento di divisione*

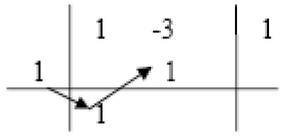
Disegnare il seguente schema di Ruffini: scrivere i coefficienti numerici del polinomio dividendo, secondo le potenze decrescenti della variabile. Se manca un termine occorre mettere 0. L'ultimo termine numerico è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno, nell'esempio è 1.



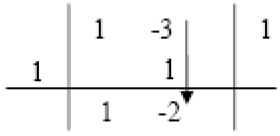
Il primo termine si riporta inalterato nella parte sottostante:



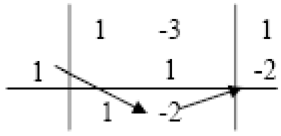
Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per il primo coefficiente appena trascritto e si riporta il risultato sotto il secondo coefficiente



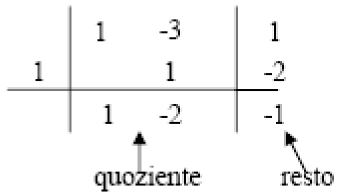
Sommare i due termini appena incolonnati -3+1=-2



Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per la somma appena ottenuta $1 \cdot (-2) = -2$



Addizionare gli ultimi due numeri incolonnati 1-2=-1



Infine si ricostruisce il polinomio quoziente, tenendo presente che i coefficienti numerici sono quelli trovati da questa divisione, cioè 1 e -2. Il quoziente è resto sono allora

$$Q(x) = a - 2 \qquad R = -1$$

Passo 3 *Verifica*

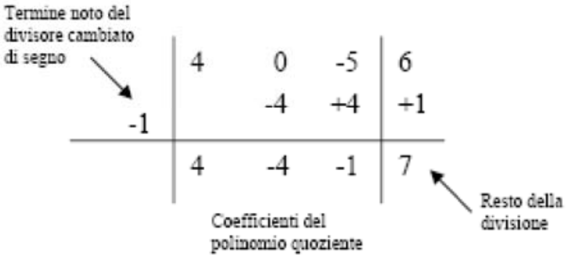
Come nella divisione con i numeri si moltiplica il polinomio risultato per il polinomio divisore e si somma il polinomio resto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$(a - 2)(a - 1) + (-1) = a^2 - a - 2a + 2 - 1 =$ $\mathbf{a^2 - 3a + 1}$

Esempio

- $(4x^3 - 5x + 6) : (x + 1)$

Applicazione del procedimento di divisione



$$Q(x)=4x^2-4x-1 \qquad R=7$$

Verifica

$Q(x)\cdot B(x)+R=A(x)$

$(4x^2-4x-1)\cdot(x+1)+7=4x^3+4x^2-4x-x-1+7=4x^3-5x+6$

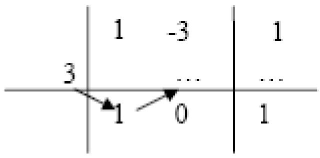
Risolvere le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini

285 $(x^2 - 3x + 1) : (x - 3) =$

Calcolo del resto $(+3)^2-3(+3)+1=\ldots$

$Q(x)=1x+0=x \qquad R=\ldots$

Verifica $(x-3)\cdot x+\ldots=x^2-3x+1$



286 $(3x^3-4x^2+5x-1):(x-2)$ $[Q(x)=3x^2+2x+9;\ R(x)=17]$

287 $(x^5-x^3+x^2-1):(x-1)$ $[Q(x)=x^4+x^3+x+1;\ R(x)=0]$

288 $(x^4-10x^2+9):(x-3)$ $[Q(x)=x^3+3x^2-x-3;\ R(x)=0]$

289 $(x^4+5x^2+5x^3-5x-6):(x+2)$ $[Q(x)=x^3+3x^2-x-3;\ R(x)=0]$

290 $(4x^3-2x^2+2x-4):(x+1)$ $[Q(x)=4x^2-6x+8;\ R(x)=-12]$

291 $\left(\frac{4}{3}y^4-2y^2+\frac{3}{2}y-2\right):\left(y+\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}y^3-\frac{2}{3}y^2-\frac{5}{3}y+\frac{7}{3};\ R(x)=-\frac{19}{6}\right]$

292 $\left(\frac{1}{3}x^5-\frac{3}{2}x-2\right):(x+2)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{23}{6};\ R(x)=-\frac{29}{3}\right]$

293 $\left(2a-\frac{4}{3}a^4-2a^2-\frac{1}{3}\right):\left(a-\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q(x)=-\frac{4}{3}a^3-\frac{2}{3}a^2-\frac{7}{3}a+\frac{5}{6};\ R(x)=\frac{1}{12}\right]$

294 $\left(\frac{4}{3}y^4-\frac{3}{2}y^3+\frac{3}{2}y-2\right):(y+3)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}y^3-\frac{11}{2}y^2+\frac{33}{2}y-48;\ R(x)=142\right]$

Vediamo il caso in cui il binomio che fa da divisore ha coefficiente numerico della variabile diverso da 1.

Esempio

- Dividere con la regola di Ruffini $(2x^4-x^3-4x^2+2x+7):(2x-1)$

In questo tipo di esercizi si deve rendere il divisore del tipo $x+n$, quindi nel nostro caso si deve dividere sia il dividendo sia il divisore per 2; sappiamo, infatti, dalla proprietà invariantiva della divisione che dividendo per uno stesso numero dividendo e divisore il quoziente della divisione non cambia, mentre il resto risulterà diviso per 2. Quindi applichiamo l’algoritmo precedente e **ricordiamoci al termine della divisione di moltiplicare il resto per 2**.

La divisione allora diventa $\left(x^4-\frac{1}{2}x^3-2x^2+x+\frac{7}{2}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Calcolo del resto

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è $+\frac{1}{2}$) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo. Il risultato che si ottiene è il resto della nuova divisione

$\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$ resto della divisione

Applicazione del procedimento di divisione

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & +1 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 & \frac{7}{2} \end{array}$$

Adesso si pone la lettera per ogni termine del polinomio risultato partendo dal grado del polinomio dividendo diminuito di 1. Il risultato è quindi il polinomio x^3-2x , il resto è $\frac{7}{2}\cdot 2=7$.

Verifica

Per la proprietà della divisione si moltiplica il quoziente per il polinomio divisore e si somma il resto ottenuto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$\left(x^3-2x\right)(2x-1)+7=2x^4-x^3-4x^2+2x+7$$

In generale, se si vuole dividere il polinomio $A(x)$ per il binomio $(nx-\alpha)$, utilizzando la proprietà invariantiva della divisione, basta dividere dividendo e divisore per *n*. Si ottengono $Q(x)$ e resto. Per ottenere il resto della divisione di partenza occorre moltiplicare per il coefficiente *n*.

Infatti si ha:

$$A(x)=(nx-\alpha)Q(x)+R$$

e, dividendo ambo i membri per *n*, si ha:

$$\frac{A(x)}{n}=\left(x-\frac{\alpha}{n}\right)Q(x)+\frac{R}{n}$$

295 $\left(x^3-2x^2+2x-4\right):(2x-2)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{1}x+\frac{1}{2};\ R=-3\right]$

296 $\left(3x^4-2x^3+x-1\right):(2x-3)$ $\left[Q(x)=\frac{3}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{8}x+\frac{53}{16};\ R=\frac{143}{16}\right]$

297 $\left(\frac{3}{2}a^4-2a^2+a-\frac{1}{2}\right):(3a-1)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{6}a^2-\frac{11}{18}a+\frac{7}{54};\ R=-\frac{10}{27}\right]$

298 $\left(3a^4b^4+a^2b^2+2ab+2\right):(ab-1)$ $\left[Q(x)=a^3b^3+3\mathrm{a}^2b^2+4ab+6;\ R=8\right]$

299 $\left(3a^4b^2-2a^2b\right):\left(a^2b-3\right)$ $\left[Q(x)=3a^2b+7;\ R=21\right]$

300 Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx+2 è divisibile per x^2-1 ? $k=-1$

301 Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx è divisibile per x^2-1 ? [nessuno]

302 Per quale valore di k il polinomio x^3-3x^2+x-k è divisibile per $x+2$? $k=-22$

303 Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile *a* che, diviso per a^2-1 dà come quoziente e a^2+1 come resto -1. R. $\left[a^4-2\right]$

304 Trovare un polinomio di secondo grado nella variabile *x* che risulti divisibile per (x-1) e per (x-2) e tale che il resto della divisione per (x-3) sia uguale a -4.

6. M.C.D. E m.c.m. TRA MONOMI

►1. Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comune divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.
Un monomio A si dice **multiplo** di un monomio B se esiste un monomio C per il quale $A=B\cdot C$; in questo caso diremo anche che B è **divisore** del monomio A.

DEFINIZIONE. Il massimo comune divisore tra due o più monomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro M.C.D., se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio

Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni

$1 \quad 2 \quad 4 \quad a \quad a^2 \quad b \quad ab \quad a^2b \quad 2a$

$2a^2 \quad 2b \quad 2ab \quad 2a^2b \quad 4a \quad 4a^2 \quad 4b \quad 4ab \quad 4a^2b$

Il monomio di grado massimo è a^2b , il M.C.D. tra i coefficienti è 4. Pertanto il M.C.D. dei monomi è $4a^2b$.

Procedura per calcolare il M.C.D. tra monomi
Il M.C.D. di un gruppo di monomi è il monomio che ha:
- **per coefficiente numerico il M.C.D. dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;**
- **la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.**

Esempio

- *Calcolare* $M.C.D.(14a^3b^4c^2;\ 4ab^2;\ 8a^2b^3c)$

Per prima cosa calcoliamo il M.C.D. tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2 .
In definitiva, $M.C.D.(14a^3b^4c^2;\ 4ab^2;\ 8a^2b^3c)=2ab^2$.

Esempio

- *Calcolare il massimo comune divisore tra* $5x^3y^2z^3;\ -\frac{1}{8}xy^2z^2;\ 7x^3yz^2$

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del M.C.D.
Le lettere in comune sono $x\,y\,z$, prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha $x\,y\,z^2$.
Quindi, $M.C.D.(5x^3y^2z^3;\ -\frac{1}{8}xy^2z^2;\ 7x^3yz^2)=x\,y\,z^2$

Osservazione
La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del M.C.D., nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del M.C.D. Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE**.** Due monomi si dicono **monomi primi tra loro** se il loro M.C.D. è 1.

►2. Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo

DEFINIZIONE. Il **minimo comune multiplo di due o più monomi** è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro m.c.m., se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio

Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$5a^3b$	alcuni multipli	$10a^3b$	$10a^3b^2$	$10a^4b$	$15a^3b$	…
$10a^2b^2$	alcuni multipli	$10a^2b^3$	$10a^3b^2$	$10a^4b^2$	$20a^2b^2$	…

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà applicando la definizione è poco pratico calcolare il m.c.m., è utile invece la seguente

Procedura per il calcolo del m.c.m. tra due o più monomi

Il m.c.m. di un gruppo di monomi è il monomio che ha:

- **per coefficiente numerico il m.c.m. dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;**
- **la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.**

Esempio

- *Calcola il minimo comune multiplo tra* $5a^3bc\,;\ 12ab^2c\,;\ 10a^3bc^2$.

Il m.c.m. tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado più alto delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, $m.c.m(5a^3bc\,;\ 12ab^2c\,;\ 10a^3bc^2)=60a^3b^2c^2$.

Esempio

- *Calcola il minimo comune multiplo tra* $6x^2y\,;\ -\frac{1}{2}xy^2z\,;\ \frac{2}{3}x^3yz$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi quindi il m.c.m. avrà come coefficiente 1.
La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono, prese una sola volta, x, y, z ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z .

In definitiva $m.c.m.\left(6x^2y\,;\ -\frac{1}{2}xy^2z\,;\ \frac{2}{3}x^3yz\right)=x^3y^2z$.

Osservazione

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z , calcoliamo M.C.D. e il m.c.m.

$$M.C.D.(x^2y\,;\ xy^2z)=xy \qquad m.c.m.(x^2y\,;\ xy^2z)=x^2y^2z$$

Moltiplichiamo ora M.C.D. e m.c.m., abbiamo:

Moltiplichiamo ora i monomi assegnati, abbiamo:

$$(x^2y)\cdot(xy^2z)=x^3y^3z$$

Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il M.C.D. e il m.c.m.
Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale:

PROPRIETÀ. Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.

305 *Vero o falso?*

a) $12a^3b^2c$ è un multiplo di abc V F
b) $2xy$ è un divisore di x^2 V F
c) $2a$ è divisore di $4ab$ V F
d) $-5b^2$ è divisore di $15ab$ V F
e) $8ab$ è multiplo di a^2b^2 V F
f) $12a^5b^4$ è multiplo di $60a^5b^7$ V F
g) 5 è divisore di $15a$ V F

306 *Vero o falso?*

a) il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati V F
b) il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato V F
c) il mcm è il prodotto dei monomi tra di loro V F

Calcola il m.c.m e il M.C.D dei seguenti gruppi di monomi

307	$14x^3y^2$	xy	$4x^3y^4$	$[28x^3y^4;\ xy]$
308	xyz^5	$x^3y^2z^2$		$[x^3y^2z^5;\ xyz^2]$
309	$4ab^2$	a^3b^2	$5ab^5$	$[20a^3b^5;\ ab^2]$
310	$2a^2bc^3$	ab^4c^2	$24a^3bc$	$[24a^3b^4c^3;\ abc]$
311	$6a^2x$	$2ax^3$	$4x^2c^3$	$[12a^2c^3x^3;\ 2x]$
312	$30ab^2c^4$	$5a^2c^3$	$12abc$	$[60a^2b^2c^4;\ ac]$
313	$x^2y^4z^2$	xz^3	$24y^2z$	$[24x^2y^4z^3;\ z]$
314	$4a^2y$	y^3c	$15ac^5$	$[60a^2c^5y^3;\ 1]$
315	$13xyc^2$	$x^2y^3c^2$	$6c^4$	$[78c^4x^2y^3;\ c^2]$
316	$a^nb^mz^{2m+1}$	$a^{3n}b^{m+3}$	$a^{4n}b^{m+4}$	$[a^{4n}b^{m+4}z^{2m+1};\ a^nb^m]$
317	$-2xy^3z$	$-6x^3yz$	$8x^3z$	$[24x^3y^3z;\ 2xz]$
318	$\frac{1}{4}ab^2c$	$-3a^2b^2c$	$-\frac{1}{2}ab^2c^2$	$[a^2b^2c^2;\ ab^2c]$
319	$\frac{2}{3}x^2y^2$	$\frac{1}{6}xy^2$	$\frac{2}{5}xyz^2$	$[x^2y^2z^2;\ xy]$

320 Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3

a) Calcola il loro M.C.D.
b) Calcola il loro m.c.m.
c) Verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto tra il loro m.c.m. e il loro M.C.D.
d) Verifica che il loro M.C.D. è uguale al quoziente tra il loro prodotto e il loro m.c.m.

Autori

Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Erasmo Modica: teoria, integrazioni
Claudio Carboncini: integrazioni
Francesco Daddi: esercizi, correzioni
Angela D'Amato: integrazioni
Germano Pettarin: esercizi
Francesco Speciale: esercizi
Anna Maria Cavallo: teoria
Silvia Monatti: integrazioni
Vittorio Patriarca: osservazioni
Dorotea Jacona: osservazioni
Luciano Sarra: correzioni
Laura Todisco: correzioni
Pierluigi Cunti: esercizi
Alessandro Castelli: revisione
Raffaele Santoro: revisione
Angela Iaciofano: annotazioni
Michela Todeschi: integrazioni
Nicola De Rosa: correzioni esercizi
Antonio Bernardo: coordinamento

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 1.2 del 26.06.2010